4.3.7 Vzorce pro poloviční úhel

Předpoklady: 4306

Ve vzorci $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ se vyskytuje goniometrická funkce pro $2x$ a x najednou. Zkusíme odvodit vzorec pro poloviční hodnotu.

Vzorec $\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y$, chceme získat vzorec $\sin y =$:

$$\cos 2y = \left(1-\sin^2 y\right) - \sin^2 y$$

$$\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y$$

$$2\sin^2 y = 1 - \cos 2y$$

$$\sin^2 y = \frac{1-\cos 2y}{2} \Rightarrow \sqrt{\sin^2 y} = \left|\sin y\right| = \sqrt{\frac{1-\cos 2y}{2}}$$ (provedeme substituci $y = \frac{x}{2}$)

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos 2\frac{x}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$ (první vzorec pro poloviční úhel)

Vada na kráse: Nezjistíme přímo hodnotu sinu, ale pouze absolutní hodnotu $\Rightarrow$ znaménko musíme zjistit někde jinde.

Př. 1: Odvoď analogicky vzorec pro $\left|\cos\frac{x}{2}\right|$.

Vzorec $\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y$, chceme získat vzorec $\cos y =$:

$$\cos 2y = \cos^2 y - \left(1-\cos^2 y\right)$$

$$\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$$

$$2\cos^2 y = 1 + \cos 2y$$

$$\cos^2 y = \frac{1+\cos 2y}{2} \Rightarrow \sqrt{\cos^2 y} = \left|\cos y\right| = \sqrt{\frac{1+\cos 2y}{2}}$$ (provedeme substituci $y = \frac{x}{2}$)

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos 2\frac{x}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Vzorce pro poloviční úhel:

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$$

Př. 2: Odvoď vzorec pro $\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

Stačí si uvědomit, že vždy platí $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, pak platí i $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$.

$$\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \frac{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$$

Př. 3: Urči přesnou hodnotu $\sin\frac{\pi}{8}$.

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \Rightarrow \left|\sin\frac{\pi}{8}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$\frac{\pi}{8} \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, kde platí $\sin x > 0$ $\Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Př. 4: Urči přesnou hodnotu $\cos 15°$.

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \Rightarrow \left|\cos 15°\right| = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

$15° \in (0;90°)$, kde platí $\cos x > 0$ $\Rightarrow \cos 15° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$

Pomocí vzorců pro hodnoty polovičního úhlu můžeme snadno zahušťovat tabulku hodnot.

Př. 5: Urči přesnou hodnotu $\cos 195°$.

Musíme zjistit, z jakého úhlu budeme počítat: $195\cdot 2 = 390 = 360 + 30$ $\Rightarrow$ $\cos 390° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \Rightarrow \left|\cos 15°\right| = \sqrt{\frac{1+\cos 390°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

$195° \in (180°;270°)$, kde platí $\cos x < 0$ $\Rightarrow \cos 195° = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$.

Př. 6: Urči definiční obor a uprav výraz $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}$.

- $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, musí platí $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \Rightarrow x \neq \pi + k\cdot 2\pi$
- jmenovatel zlomku je vždy kladný (součet jedničky a druhé mocniny),

$\Rightarrow \; x \in R - \bigcup_{k\in Z}\{\pi + k\cdot 2\pi\}$

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \sin x$$

Př. 7: Vyřeš rovnici $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} - \sin x = 0$.

Problém: Rozdílné argumenty u obou sinů. Zdánlivě by bylo možné použít vzorec pro poloviční úhel, ale v rovnici by se objevila odmocnina, museli bych umocňovat. $\Rightarrow$ lepším řešením je substituce $\frac{x}{2} = y$. Použijeme pak vzorce pro dvojnásobný úhel, které neobsahují odmocniny.

$\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} - \sin x = 0$

Substituce: $y = \frac{x}{2}$

$\sqrt{3}\sin y - \sin 2y = 0$

$\sqrt{3}\sin y - 2\sin y\cos y = 0$

$\sin y\left(\sqrt{3} - 2\cos y\right) = 0$

Součinový tvar:

$\sin y = 0$

$y_1 = 0 + k\cdot\pi$

$\left(\sqrt{3} - 2\cos y\right) = 0$

$\sqrt{3} = 2\cos y$

$\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_2 = \frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi$

$$y_3 = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

Návrat k původní proměnné:

$y_1 = \frac{x_1}{2} = 0 + k \cdot \pi$

$\frac{x_1}{2} = 0 + k \cdot \pi \quad / \cdot 2$

$x_1 = 0 + k \cdot 2\pi$

$y_2 = \frac{x_2}{2} = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$\frac{x_2}{2} = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad / \cdot 2$

$x_2 = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

$y_3 = \frac{x_3}{2} = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$\frac{x_3}{2} = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad / \cdot 2$

$x_3 = \frac{11}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ k \cdot 2\pi; \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi; \frac{11}{3}\pi + k \cdot 4\pi \right\}$$

Dodatek: Vzorce pro poloviční úhel se nepoužívají k řešení rovnic a nerovnic, protože do zanáší odmocniny a nutnost umocňování (a dělání zkoušek). Rovnice se řeší substitucí na dvojnásobný úhel, který se odstraní vzorci pro dvojnásobný úhel.

Př. 8: Urči definiční obor rovnosti $\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}\sin 2x$ a pak dokaž její platnost:

a) použitím vzorců pro poloviční úhel b) substitucí $y = \frac{x}{2}$ a použitím vzorců pro dvojnásobný úhel.

Který z obou postupů je korektnější?

- $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, musí platí $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \Rightarrow x \neq \pi + k \cdot 2\pi$
- $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$, musí platí $\frac{x}{2} \neq k \cdot \pi \Rightarrow x \neq k \cdot 2\pi$
- jmenovatel zlomku je nenulový $\Rightarrow \operatorname{cotg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} \neq \pm 1$

  $\Rightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$ (všechny tři skupiny zapsány pohromadě).

a) $$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 x}{\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}} - \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}} = \frac{1}{4}\sin 2x = \frac{1}{4} 2\sin x \cos x$$

$$\frac{\cos^2 x}{\frac{\left(\sqrt{1+\cos x}\right)^2 - \left(\sqrt{1-\cos x}\right)^2}{\sqrt{1-\cos x} \cdot \sqrt{1+\cos x}}} = \frac{1}{2}\sin x \cos x \qquad / : \cos x$$

$$\frac{\cos x}{\frac{1+\cos x - (1-\cos x)}{\sqrt{(1+\cos x)(1-\cos x)}}} = \frac{1}{2}\sin x$$

$$\frac{\cos x}{\frac{2\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}} = \frac{1}{2}\sin x$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin x} = \frac{1}{2}\sin x$$

$$\sin x = \sin x$$

b) $\frac{\cos^2 x}{\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}\sin 2x \Rightarrow \frac{\cos^2 2y}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{tg} y} = \frac{1}{4}\sin 4y$

$$\frac{\cos^2 2y}{\frac{\cos y}{\sin y} - \frac{\sin y}{\cos y}} = \frac{1}{4}2\sin 2y\cos 2y \quad /:\cos 2y$$

$$\frac{\cos 2y}{\frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\sin y\cos y}} = \frac{1}{2}\sin 2y$$

$$\frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\sin y\cos y}} = \frac{1}{2}2\sin y\cos y$$

$$\sin y\cos y = \sin y\cos y$$

Druhý postup je korektnější, nemusíme řešit problémy se znamínky a odmocninami ve vzorcích (při úpravách v bodě a) jsme je taktně zamlčeli).

Př. 9: Urči přesnou hodnotu $\sin\frac{\pi}{16}$. Ověř na kalkulačce, zda hodnota získaného výrazu odpovídá hodnotě vypočtené kalkulačkou jako $\sin\frac{\pi}{16}$.

Platí: $\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$, $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \Rightarrow$ musíme určit $\cos\frac{\pi}{8}$.

$\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{16} \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, kde platí $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ $\Rightarrow$ všechny získané hodnoty jsou kladné.

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \Rightarrow \left|\cos\frac{\pi}{8}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \Rightarrow \left|\sin\frac{\pi}{16}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

Kalkulačka: $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} = 0{,}195090322$, $\sin\frac{\pi}{16} = 0{,}195090322$.

Pro zajímavost: $\frac{\pi}{16} = 0{,}19634954 \Rightarrow$ pro malá čísla se hodnoty funkce $y = \sin x$ blíží hodnotám funkce $y = x$.

Pedagogická poznámka: Nejčastějším problémem je zadání výrazu do kalkulačky a přepínání mezi stupni a radiány.

Př. 10: Petáková:
strana 48, cvičení 66 a)
strana 48, cvičení 69 c)
strana 48, cvičení 70 a)
strana 54, cvičení 20 b), e)

Shrnutí: Vzorce pro poloviční úhly obsahují odmocniny a proto se substitucí vyhýbáme jejich používání při řešení rovnic.