

### 4.3.6 Vzorce pro dvojnásobný úhel

**Předpoklady:** 4305

Začneme příkladem.

**Př. 1:** Pomocí součtových vzorců odvoď vzorec pro  $\sin 2x$ .

$$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$$

**Př. 2:** Pomocí součtových vzorců odvoď vzorec pro  $\cos 2x$ .

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

**Př. 3:** Pomocí součtových vzorců odvoď vzorec pro  $\operatorname{tg} 2x$ .

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x+x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Tím jsme získali druhou skupinu vzorců:

**Vzorce pro dvojnásobný úhel:**

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

**Př. 4:** Otestuj vzorec pro  $\sin 2x$  výpočtem  $\sin 60^\circ$  z hodnot goniometrických funkcí pro úhel  $30^\circ$ .

$$\sin 60^\circ = \sin(2 \cdot 30^\circ) = 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Př. 5:** Otestuj vzorec pro  $\cos 2x$ , pomocí výpočtu  $\cos \frac{\pi}{2}$  z hodnot goniometrických funkcí pro úhel  $\frac{\pi}{4}$ .

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

**Př. 6:** Vyjádři  $\cos 3x$  pomocí  $\sin x$  a  $\cos x$ .

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - (2 \sin x \cos x) \sin x = \\ &= \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x\end{aligned}$$

**Př. 7:** Vyjádři  $\sin 3x$  pomocí  $\sin x$  a  $\cos x$ .

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos x \cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x = \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x\end{aligned}$$

### Postřeh:

Ve vzorcích pro  $\sin 2x$  a  $\cos 2x$  tvoří pravou stranu členy dávající druhé mocniny goniometrických funkcí, ve vzorcích pro  $\sin 3x$  a  $\cos 3x$  jsou na pravé straně třetí mocniny. Zřejmě je v tom nějaká zákonitost. Více později.

**Př. 8:** Urči hodnoty goniometrických funkcí  $\sin 2x$ ,  $\cos 2x$ ,  $\operatorname{tg} 2x$ ,  $\sin 4x$  a  $\cos 4x$ ,

$$\text{jestliže platí } \sin x = \frac{2}{3} \text{ a } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

Abychom mohli použít vzorce pro dvojnásobný úhel, musíme znát hodnotu  $\sin x$  i  $\cos x \Rightarrow$  nejdříve určíme  $\cos x$ :  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

V intervalu  $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$  je  $\cos x < 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ .

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{-\frac{4\sqrt{5}}{9}}{\frac{1}{9}} = -4\sqrt{5}$$

Hodnoty  $\sin 4x$  a  $\cos 4x$  určíme podle již určených hodnot  $\sin 2x$  a  $\cos 2x$ .

$$\sin 4x = \sin 2(2x) = 2 \sin 2x \cos 2x = 2 \cdot \left(-\frac{4\sqrt{5}}{9}\right) \cdot \frac{1}{9} = -\frac{8\sqrt{5}}{81}$$

$$\cos 4x = \cos 2(2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \left(\frac{1}{9}\right)^2 - \left(-\frac{4\sqrt{5}}{9}\right)^2 = \frac{1}{81} - \frac{80}{81} = -\frac{79}{81}$$

**Př. 9:** Petáková:  
 strana 45, cvičení 49 c)  
 strana 45, cvičení 50 a)  
 strana 46, cvičení 51 a), c)

**Př. 10:** Urči definiční obor výrazů v rovnosti a dokaž její platnost.

a)  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$

b)  $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$

c)  $\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$

a)  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$

$x \in R$

$1 - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \sin^2 x$

$1 - \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x$

$\sin^2 x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x$

$2 \sin^2 x = 2 \sin^2 x$

b)  $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$

• Levá strana: zlomek  $\Rightarrow$  nesmíme dělit nulou  $\Rightarrow 1 + \cos 2x \neq 0 \Rightarrow \cos 2x \neq -1 \Rightarrow$

$2x \neq \pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

• Pravá strana:  $\operatorname{tg} x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Rightarrow x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right\}$

$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\frac{2 \sin x \cos x}{1 - \sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + \cos^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$

c)  $\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$

• Levá strana: zlomek  $\Rightarrow$  nesmíme dělit nulou  $\Rightarrow 1 + \sin 2x \neq 0 \Rightarrow \sin 2x \neq -1 \Rightarrow$

$2x \neq \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow x \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi$

- Pravá strana:  $\operatorname{tg} x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , nesmíme dělit nulou  $1 + \operatorname{tg} x \neq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x \neq -1 \Rightarrow$

$$x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \frac{3}{4} \pi + k \cdot \pi \right\}$$

$$\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + 2 \sin x \cos x} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$\frac{(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

$$\frac{(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

**Př. 11:** Urči definiční obor výrazů a zjednoduš je.

a)  $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$       b)  $\frac{\sin 2x + 2 \cos^2 x \sin x}{2 \cos x + \cos 2x + 1}$

a)  $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

b)  $\frac{\sin 2x + 2 \cos^2 x \sin x}{2 \cos x + \cos 2x + 1}$

Zlomek  $\Rightarrow$  nesmíme dělit nulou  $\Rightarrow$  výraz je příliš složitý, počkáme na stav po úpravách.

$$\frac{\sin 2x + 2 \cos^2 x \sin x}{2 \cos x + \cos 2x + 1} = \frac{2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x \sin x}{2 \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x (1 + \cos x)}{2 \cos x + 2 \cos^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x (1 + \cos x)}{2 \cos x (1 + \cos x)} = \sin x$$

Čitatel zlomku před krácením:  $2 \cos x (1 + \cos x) \Rightarrow$

- $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $1 + \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq \pi + k \cdot 2\pi$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

**Př. 12:** Petáková:  
 strana 46, cvičení 52 e), j), k), t), z)  
 strana 46, cvičení 53 d), g), l)

**Př. 13:** Vyřeš rovnici  $\sin x - \sin 2x = 0$ .

**Problém:** Uvnitř každého sinu je jiné číslo  $\Rightarrow$  použijeme vzorec pro  $\sin 2x$  a pak dořešíme.

$$\sin x - \sin 2x = 0$$

$$\sin x - 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x(1 - 2 \cos x) = 0$$

**Součinný tvar:**

$$\sin x = 0$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{0 + k \cdot \pi\}$$

$$(1 - 2 \cos x) = 0$$

$$2 \cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$K_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{3} \pi + k \cdot 2\pi; \frac{5}{3} \pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \cdot \pi; \frac{1}{3} \pi + k \cdot 2\pi; \frac{5}{3} \pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

**Př. 14:** Vyřeš rovnici  $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ .

**Problém:** Na levé straně součin  $\sin x$  a  $\cos x$ , vpravo není nula  $\Rightarrow$  nejde na součinný tvar.

**Nápad:** Vlevo je téměř celý vzorec pro  $\sin 2x \Rightarrow$  zkusíme vzorec zkompletovat a tak získat rovnici s jedinou goniometrickou funkcí.

$$\sin x \cos x = \frac{1}{4} \quad / \cdot 2$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \quad (\text{použijeme } 2 \sin x \cos x = \sin 2x)$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

**Substituce:**  $a = 2x$

$$\sin a = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$a_2 = \frac{5}{6} \pi + k \cdot 2\pi$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$2x_1 = a_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$2x_2 = a_2 = \frac{5}{6} \pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad / : 2$$

$$2x_2 = \frac{5}{6} \pi + k \cdot 2\pi \quad / : 2$$

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$$

$$x_2 = \frac{5}{12} \pi + k \cdot \pi$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \right\}$$

$$K_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5}{12} \pi + k \cdot \pi \right\}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{12} \pi + k \cdot \pi; \frac{5}{12} \pi + k \cdot \pi \right\}$$

**Př. 15:** Vyřeš rovnici  $\cos 2x + \cos x = 0$ .

**Problém:** Uvnitř každého cosinu je jiné číslo  $\Rightarrow$  použijeme vzorec pro  $\cos 2x$  a pak dořešíme.

$$\cos 2x + \cos x = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x = 0$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

**Substituce:**  $y = \cos x$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$$

$$y_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$y_1 = \cos x_1 = -1$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{ \pi + k \cdot 2\pi \}$$

$y_2 = \cos x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$  třetinové úhly v kladné polorovině osy  $x$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad x_3 = \frac{5}{3} \pi + k \cdot 2\pi$$

$$K_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{3} \pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \pi + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{3} \pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

**Př. 16:** Vyřeš rovnici  $\sin 6x + 2 \cos^2 3x = 0$ .

**Problém:** Uvnitř obou funkcí je jiné číslo, navíc obě čísla jsou poměrně velká (nemáme na ně vzorec)  $\Rightarrow$  substituce.

**Substituce:**  $y = 3x$

$$\sin 2y + 2 \cos^2 y = 0 \Rightarrow \text{ted' můžeme použít vzorec } \sin 2y = 2 \sin y \cos y.$$

$$2 \sin y \cos y + 2 \cos^2 y = 0 \quad / : 2$$

$$\sin y \cos y + \cos^2 y = 0$$

$$\cos y (\sin y + \cos y) = 0 \Rightarrow \text{součinový tvar.}$$

$$\cos y = 0$$

$$y_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

$$\sin y + \cos y = 0$$

$$\sin y = -\cos y \quad / : \cos y \text{ v této větvi } \cos y \neq 0$$

$$\frac{\sin y}{\cos y} = \operatorname{tg} y = -1$$

$$y_2 = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$y_1 = 3x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

$$y_2 = 3x_2 = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$3x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad /:3$$

$$3x_2 = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi \quad /:3$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3} \right\}$$

**Př. 17:** Vyřeš rovnici  $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 4 \cos 2x$ .

**Problém:** Různé funkce, různé výrazy uvnitř funkcí  $\Rightarrow$  přepíšeme  $\operatorname{tg} x$  a  $\operatorname{cotg} x$  pomocí  $\sin x$  a  $\cos x$ .

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4 \cos 2x$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = 4 \cos 2x$$

$$\frac{1}{\cos x \sin x} = 4 \cos 2x \quad (\text{jmenovatel zlomku připomíná } \sin 2x = 2 \sin x \cos x)$$

$$1 = 2 \cos 2x \cdot 2 \sin x \cos x$$

$$1 = 2 \cos 2x \cdot \sin 2x \quad (\text{vzorec } \sin 2x = 2 \sin x \cos x \text{ použijeme ještě jednou})$$

$$1 = \sin 4x$$

**Substitute:**  $a = 4x$

$$\sin a = 1$$

$$a = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$a = 4x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad /:4$$

$$x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

**Př. 18:** Vyřeš nerovnici  $4 \sin 2x \cos 2x > 1$ .

**Problém:** Na pravé straně není nula  $\Rightarrow$  nemůžeme řešit jako nerovnici v součinném tvaru.

**Nápad:** Vlevo je téměř celý vzorec pro  $\sin 2x$  (s dvojnásobným argumentem)  $\Rightarrow$  zkusíme vzorec zkompletovat a tak získat nerovnici s jedinou goniometrickou funkcí.

$$4 \sin 2x \cos 2x > 1 \quad /: 2$$

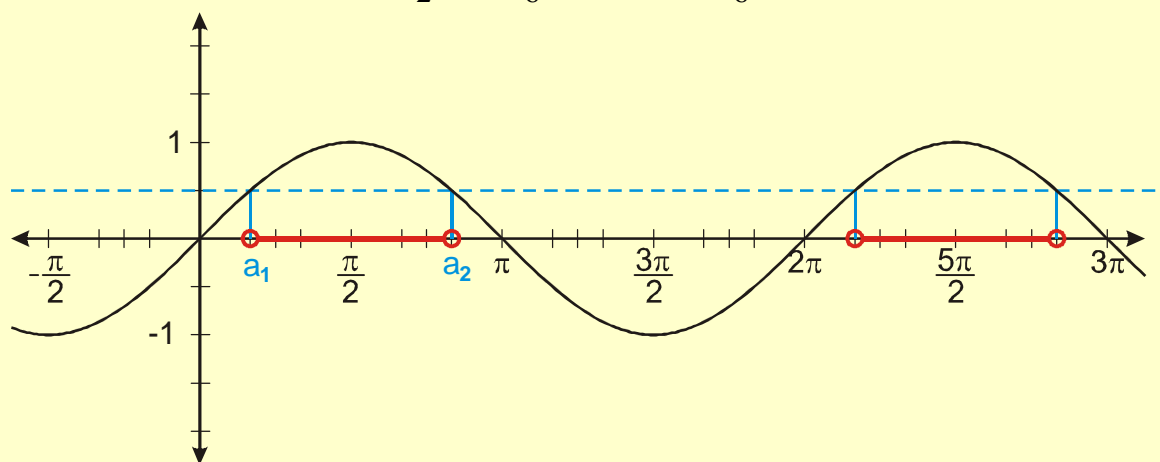
$$2 \sin 2x \cos 2x > \frac{1}{2}$$

$$\sin 4x > \frac{1}{2}$$

**Substitute:**  $a = 4x$

$$\sin a > \frac{1}{2}$$

Základní řešení rovnice  $\sin a = \frac{1}{2}$ :  $a_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ,  $a_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ .



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu  $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$ , hodnoty se opakují s periodou

$$2\pi \Rightarrow K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right).$$

**Návrat k původní proměnné:** (pře počítáme meze a periodu intervalů)

$$a_1 = 4x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$a_2 = 4x_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$4x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad /: 4$$

$$4x_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad /: 4$$

$$x_1 = \frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

**Př. 19:** Vyřeš nerovnici  $\cos^2 x - \sin^2 x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Na první pohled jasné řešení:  $\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$2 \cos^2 x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$  problém číslo na pravé straně po odmocnění nebude patřit mezi tabulkové hodnoty  $\Rightarrow$  budeme muset používat arccos  $\Rightarrow$  zkusíme se vrátit k původnímu zadání:  $\cos^2 x - \sin^2 x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

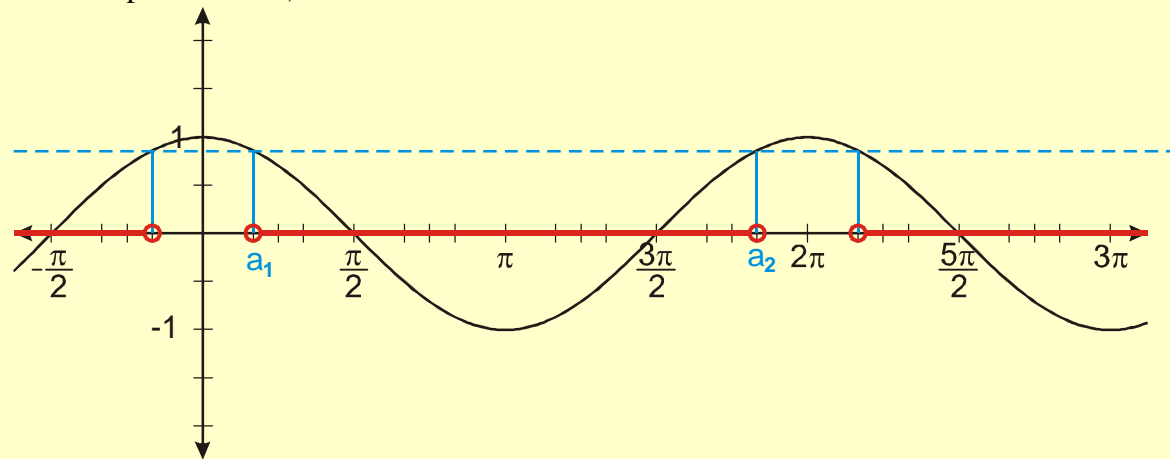
**Nápad:** Levá strana tvoří vzorec  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ .

$$\cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{trivialitka.}$$

**Substituce:**  $a = 2x$ .

$$\cos a \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Základní řešení rovnice  $\cos a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ :  $a_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ,  $a_2 = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  (šestinové úhly v kladné polorovině  $x$ ).



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu  $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{11}{6}\pi\right)$ , hodnoty se opakují s periodou

$$2\pi \Rightarrow K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6}; \frac{11}{6}\pi\right).$$

**Návrat k původní proměnné:** (pře počítáme meze a periodu intervalů)

$$a_1 = 2x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$a_2 = 2x_2 = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad /:2$$

$$2x_2 = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad /:2$$

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$$

$$x_2 = \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi; \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi\right)$$

**Př. 20:** Nakresli graf funkce  $y = \sin x \cos x$ .

**Problém:** Funkce vznikla jako součin dvou goniometrických funkcí  $\Rightarrow$  museli bychom nakreslit oba grafy a „násobit“ je mezi sebou.

**Postřeh:** Předpis funkce připomíná vzorec  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , funkci  $y = \sin 2x$  bych nakreslil snadno.

$$y = \sin x \cos x = \frac{1}{2} 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow \text{kreslíme graf funkce } y = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

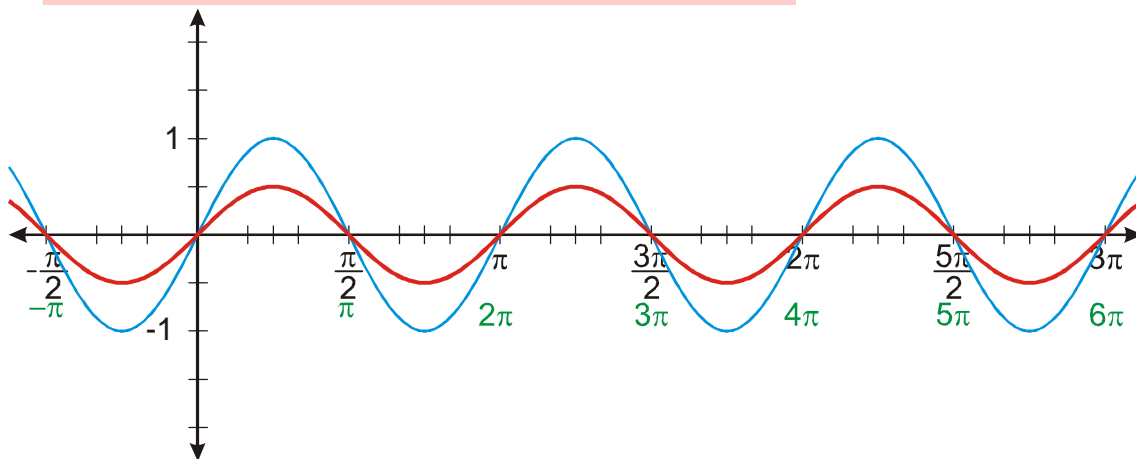
Platí:  $y = \frac{1}{2} \sin(2x) = \frac{1}{2} f(2x)$

Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $2x$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(2x) = \sin(2x)$ .

Nakreslíme funkci  $y = \frac{1}{2} f(2x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$ .



**Př. 21:** Petáková:

- strana 53, cvičení 13 d)
- strana 53, cvičení 14 a), d)
- strana 53, cvičení 15 a), d), g)
- strana 53, cvičení 16 c)
- strana 54, cvičení 17 d), f), g)
- strana 54, cvičení 18 a)
- strana 54, cvičení 19 d)

**Shrnutí:**