4.3.5 Součtové vzorce

Předpoklady: 4304

Závorku ve výrazu $\sin(x+y)$ **není možné jen tak roznásobit ani rozdělit:**

$0=\sin(\pi)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\neq\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+1=2$.

Způsob, jakým goniometrické funkce vyrábějí ze zadaných čísel hodnoty, sice známe, ale je tak neprůhledný, že není možné používat závorkové úpravy na výrazy uvnitř funkcí $\Rightarrow$ **hodnotu goniometrické funkce musíme počítat z čísla** $(x+y)$ **a na úpravy výrazu můžeme použít pouze odvozené goniometrické vzorce.**

Vzorců je hodně, patří do několika skupin – první skupinu tvoří **součtové vzorce**.
Pro všechna reálná čísla *x*, *y* platí: $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$.

Př. 1: Dokaž platnost vztahu $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Použijeme vzorec $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$, abychom odstranili závorku na pravé straně rovnosti, dosazujeme $y=\frac{\pi}{2}$.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{2}+\cos x\sin\frac{\pi}{2}=\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1=\cos x$$

Př. 2: Využij vztah pro $\sin(x+y)$ k odvození vzorce pro $\sin(x-y)$.

$$\sin(x-y)=\sin[x+(-y)]=\sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$

Podobné vzorce můžeme odvodit i pro funkci $\cos x$.

Součtové vzorce:
Pro všechna reálná čísla *x*, *y* platí:

- $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
- $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$
- $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
- $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

Pedagogická poznámka: Nepožaduji po studentech, aby vzorce uměli nazpaměť. Součtové vzorce (stejně jako vzorce, probírané v následujících hodinách) si mohou napsat na speciální papír, který mohou kromě hodin používat i při psaní písemek.

Pedagogická poznámka: Odvození součtových vzorců pro $\sin(x+y)$ a $\cos(x+y)$ v hodinách neprovádím. Je uvedeno na konci hodiny pro zájemce.

Př. 3: Dokaž platnost vztahu $\sin x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Použijeme vzorec $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$, abychom odstranili závorku na pravé straně rovnosti, dosazujeme $y=\frac{\pi}{2}$.

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{2}+\sin x\sin\frac{\pi}{2}=\cos x\cdot 0+\sin x\cdot 1=\sin x$$

Př. 4: Zjednoduš výraz: $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x-\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x-\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}=2\sin x\sin\frac{\pi}{6}=2\sin x\frac{1}{2}=\sin x$$

Pedagogická poznámka: Některým studentů dělá problémy pochopit, že za *y* ve při rozkladu $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ dosazujeme *x*.

Př. 5: Dokaž rovnost: $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin x+\cos x$.

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\cos x\cdot\frac{2}{2}+\sin x\cdot\frac{2}{2}=\sin x+\cos x$$

Př. 6: Dokaž rovnost: $\sin x=\sin(\pi-x)=-\sin(\pi+x)=-\sin(2\pi-x)$

$$\sin(\pi-x)=\sin\pi\cos x-\cos\pi\sin x=0\cdot\cos x-(-1)\sin x=\sin x$$

$$-\sin(\pi+x)=-(\sin\pi\cos x+\cos\pi\sin x)=-(0\cdot\cos x+(-1)\sin x)=\sin x$$

$$-\sin(2\pi-x)=-(\sin 2\pi\cos x-\cos 2\pi\sin x)=-(0\cdot\cos x-1\cdot\sin x)=\sin x$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad slouží k synchronizaci třídy.

Př. 7: Odvoď součtový vzorec pro $\operatorname{tg}(x+y)$.

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}=\frac{\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=$$

$$\frac{\frac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}+\frac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}-\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

Pedagogická poznámka: Rozšíření zlomku výrazem $\cos x\cos y$ je studentům třeba poradit.

Př. 8: Odvoď součtový vzorec pro $\operatorname{tg}(x-y)$.

Problém: Odvození je příliš dlouhé $\Rightarrow$ použijeme $\operatorname{tg}(x-y)=\operatorname{tg}[x+(-y)]$.

$$\operatorname{tg}(x-y)=\operatorname{tg}[x+(-y)]=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(-y)}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(-y)}$$

Použijeme $\operatorname{tg}(-y)=-\operatorname{tg}y$ ($\operatorname{tg}x$ je lichá funkce).

$$\operatorname{tg}(x-y)=\operatorname{tg}[x+(-y)]=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(-y)}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(-y)}=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

Př. 9: Urči přesnou hodnotu $\cos 75°$.

Problém: Známe přesné hodnoty pouze pro tabulkové hodnoty $30°$, $45°$, $60°$
$\Rightarrow$ zkusíme vyjádřit $75°$ sčítáním (odčítáním) tabulkových hodnot: $75°=45°+30°$.

$$\cos 75°=\cos(45°+30°)=\cos 45°\cdot\cos 30°-\sin 45°\cdot\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Př. 10: Urči přesnou hodnotu $\sin 15°$.

Problém: Známe přesné hodnoty pouze pro tabulkové hodnoty $30°$, $45°$, $60°$
$\Rightarrow$ zkusíme vyjádřit $15°$ sčítáním (odčítáním) tabulkových hodnot: $15°=45°-30°$.

$$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Pedagogická poznámka: Můžete vyzvat studenty, aby vysvětlili shodu výsledků dvou předchozích příkladů, případně podiskutovat o způsobu, jak získat přesné hodnoty goniometrických funkcí v dalších bodech.

Př. 11: Vyřeš rovnici: $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin x=1$.

Problém: Dvě různé goniometrické funkce s různými argumenty $\Rightarrow$ pomocí součtového vzorce rozložíme argument v cosinu, aby uvnitř všech goniometrických funkcí bylo pouze *x*.

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin x=1$$
$$\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{2}+\sin x=1$$
$$\cos x\cdot 0+\sin x\cdot 1+\sin x=1$$
$$2\sin x=1$$

$\sin x=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ šestinové úhly v kladné polorovině $\Rightarrow$ $x_1=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi$, $x_2=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$.

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi;\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Př. 12: Vyřeš rovnici: $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$.

Problém: Dvě různé goniometrické funkce s různými argumenty $\Rightarrow$ pomocí součtových vzorců rozložíme argumenty obou cosinů, aby uvnitř všech goniometrických funkcí bylo pouze *x*.

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$$
$$\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x=1$$
$$\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=1$$
$$2\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos x\sqrt{2}=1$$

$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ čtvrtinové úhly v kladné polorovině na ose *x* $\Rightarrow$

$x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi$, $x_2=\frac{7}{4}\pi+k\cdot 2\pi$.

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi;\frac{7}{4}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Př. 13: Vyřeš nerovnici: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$.

Problém: Závorky u obou sinů se nerovnají, nemůžeme tedy substituovat $\Rightarrow$ rozložíme pomocí součtových vzorců.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}-\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)>0$$
$$\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}-\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}>0$$
$$2\cos x\sin\frac{\pi}{4}>0$$
$$2\cos x\frac{\sqrt{2}}{2}>0$$
$$\cos x>0$$
$$K=\bigcup_{k\in Z}\left(-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi;\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right)$$

Př. 14: Petáková:
strana 47, cvičení 55 a), c), e)
strana 47, cvičení 56 d), e)
strana 47, cvičení 57 b), d), h) , l)
strana 54, cvičení 22 a), g), h)

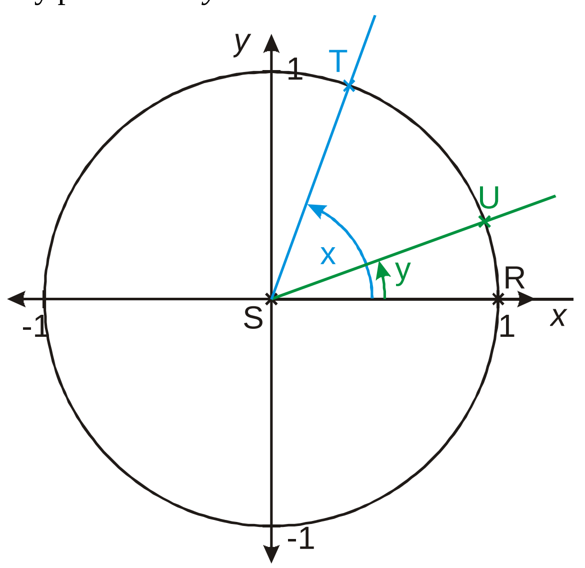
Pedagogická poznámka: Následující odvození o hodinách vynechávám, učebnice ho obsahuje pouze kvůli případným zájemcům, přesto je odvození psáno stylem, který v učebnici používám pro vysvětlování normální látky, aby v důležitých místech studenti získali čas a důvod na rozmyšlenou.

Pedagogická poznámka: V podstatě sledujeme odvození z učebnice Goniometrie: Odvárko, Prometheus.

Odvození součtových vzorců

K odvození součtových vzorců použijeme jednotkovou kružnici.

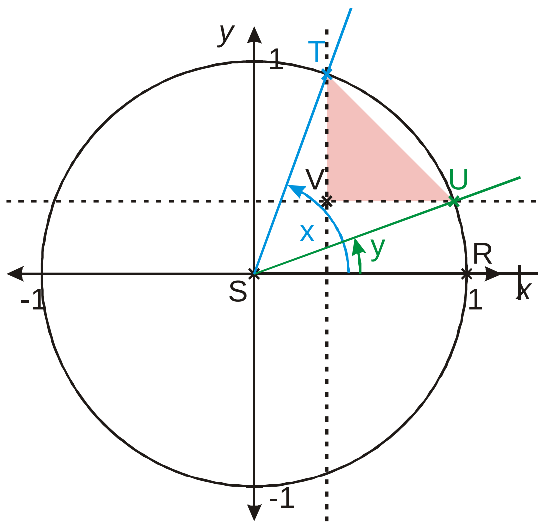
Zakreslíme do obrázku jednotkové kružnice dva orientované úhly $x=\widehat{RST}$, $y=\widehat{RSU}$, tak aby platilo $x>y$.

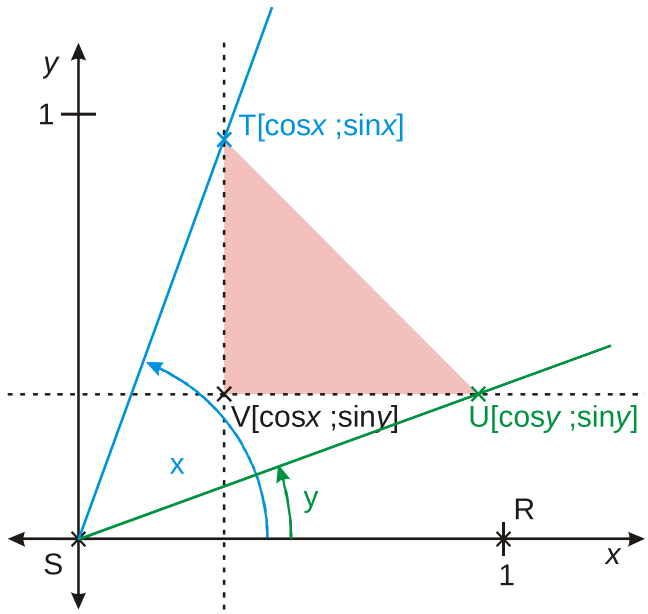


Př. 15: Urči souřadnice bodů *R*, *T*, *U* souřadné soustavě Sxy.

Platí: $R[1;0]$, $T[\cos x, \sin y]$, $U[\cos y, \sin x]$.

Bodem *T* vedeme rovnoběžku s osou *x*, bodem *U* rovnoběžku s osou *x*. Vznikne tak pravoúhlý trojúhelník *TUV*.





Př. 16: Urči délky stran trojúhelníku *TUV*.

Z obrázku vidíme: $|VU| = |\cos x - \cos y|$, $|TV| = |\sin x - \sin y|$.

Délku přepony určíme pomocí Pythagorovy věty: $c^2 = a^2 + b^2$.

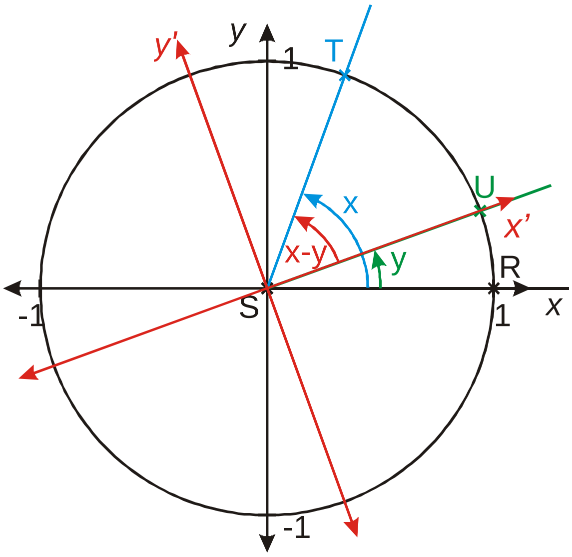
$$|TU|^2 = |\cos x - \cos y|^2 + |\sin x - \sin y|^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$$

$$|TU|^2 = \cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2\sin x \sin y + \sin^2 y$$

$$|TU|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y - 2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y$$

$$|TU|^2 = 1 + 1 - 2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y = 2(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

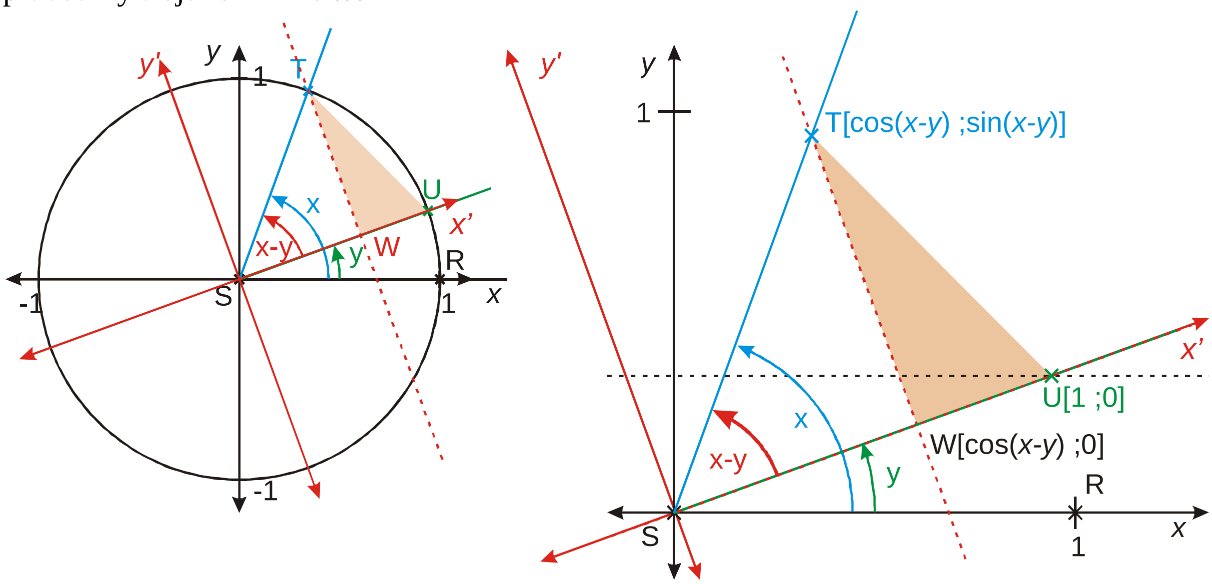
Nyní zopakujeme celý postup vzhledem k nové soustavě souřadnic $Sx'y'$, kterou získáme otočením soustavy Sxy o úhel $y = \widehat{RSU}$.



Př. 17: Urči souřadnice bodů T, U souřadné soustavě $Sx'y'$.

Platí: $T\left[\cos(x-y),\sin(x-y)\right]$, $U\left[1,0\right]$.

Bodem T vedeme rovnoběžku s osou y', bodem U rovnoběžku s osou x'. Vznikne tak pravoúhlý trojúhelník TUW.



Př. 18: Urči délky stran trojúhelníku TUV.

Z obrázku vidíme: $|WU|=|1-\cos(x-y)|$, $|TW|=|\sin(x-y)|$.

Délku přepony určíme pomocí Pythagorovy věty: $c^2=a^2+b^2$.

$$|TU|^2=|1-\cos(x-y)|^2+|\sin(x-y)|^2=\left[1-\cos(x-y)\right]^2+\left[\sin(x-y)\right]^2$$

$$|TU|^2=1-2\cos(x-y)+\cos^2(x-y)+\sin^2(x-y)=1-2\cos(x-y)+1$$

$$|TU|^2=2-2\cos(x-y)=2\left[1-\cos(x-y)\right]$$

Otočením soustavy souřadnic se nemůže změnit vzdálenost bodů T, U $\Rightarrow$ obě vyjádření délky úsečky TU musí být shodné: $2\left[1-\cos\left(x-y\right)\right]=2\left(1-\cos x\cos y-\sin x\sin y\right)$.

$1-\cos\left(x-y\right)=1-\cos x\cos y-\sin x\sin y$

$\cos\left(x-y\right)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ - jeden ze vzorců, které jsme si ukázali na začátku hodiny.

Odvození není zcela kompletní. Musíme ověřit případy, které jsme vynechali v našich předpokladech:
$x>y$, $x,y\in\left\langle 0;2\pi\right)$.

Ověření pro $x=y$**,** $x,y\in\left\langle 0;2\pi\right)$**:** Dosadíme do odvozeného vzorce: $x=y$:

$\cos\left(x-y\right)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$\cos\left(x-x\right)=\cos x\cos x+\sin x\sin x$

$\cos 0=\cos^2 x+\sin^2 x=1$ - platí.

Ověření pro $x<y$**,** $x,y\in\left\langle 0;2\pi\right)$ **:**

$\cos\left(x-y\right)=\cos\left[-\left(y-x\right)\right]=\cos\left(y-x\right)=\cos y\cos x+\sin y\sin x$

Platí: $\cos\left[-\left(y-x\right)\right]=\cos\left(y-x\right)$, protože $\cos x$ je sudá funkce.

Ověření pro $x,y\in R$ **:**

Víme, že pro $x,y\in R$ existují: $x_0,y_0\in\left\langle 0;2\pi\right)$ a $k,m\in Z$, tak, že platí:

$x=x_0+k\cdot 2\pi$, $y=y_0+m\cdot 2\pi$

Dosadíme do obou stran vzorce (využijeme periodičnost funkcí $y=\sin x$ a $y=\cos x$):

$\cos\left(x-y\right)=\cos\left[x_0+k\cdot 2\pi-\left(y_0+m\cdot 2\pi\right)\right]=\cos\left[x_0-y_0+\left(k-m\right)\cdot 2\pi\right]=\cos\left(x_0-y_0\right)$

$\cos x\cos y+\sin x\sin y=$

$\cos\left(x_0+k\cdot 2\pi\right)\cos\left(y_0+m\cdot 2\pi\right)+\sin\left(x_0+k\cdot 2\pi\right)\sin\left(y_0+m\cdot 2\pi\right)=$

$\cos x_0\cos y_0+\sin x_0\sin y_0$

Odvození vztahu $\sin\left(x+y\right)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ **:**

Platí: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos x+\sin\frac{\pi}{2}\sin x=0\cdot\cos x+1\cdot\sin x=\sin x$.

Platí: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ (předchozí vztah).

$\sin\left(x+y\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+y\right)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-y\right]=\cos x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin y=$

$=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

Jsme z nyní získaných odvodili již v začátku hodiny pomocí přezávorkování a využitím sudosti a lichosti goniometrických funkcí.

Shrnutí: Rozkládat výrazy uvnitř goniometrických funkcí můžeme pouze pomocí goniometrických vzorců.