

4.3.5 Součtové vzorce

Předpoklady: 4304

Závorku ve výrazu $\sin(x+y)$ není možné jen tak roznásobit ani rozdělit:

$$0 = \sin(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \neq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2.$$

Způsob, jakým goniometrické funkce vyrábějí ze zadaných čísel hodnoty, sice známe, ale je tak neprůhledný, že není možné používat závorkové úpravy na výrazy uvnitř funkcí \Rightarrow hodnotu goniometrické funkce musíme počítat z čísla $(x+y)$ a na úpravy výrazu můžeme použít pouze odvozené goniometrické vzorce.

Vzorců je hodně, patří do několika skupin – první skupinu tvoří **součtové vzorce**.

Pro všechna reálná čísla x, y platí: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

Př. 1: Dokaž platnost vztahu $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Použijeme vzorec $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, abychom odstranili závorku na pravé straně rovnosti, dosazujeme $y = \frac{\pi}{2}$.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Př. 2: Využij vztah pro $\sin(x+y)$ k odvození vzorce pro $\sin(x-y)$.

$$\sin(x-y) = \sin[x+(-y)] = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Podobné vzorce můžeme odvodit i pro funkci $\cos x$.

Součtové vzorce:

Pro všechna reálná čísla x, y platí:

- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

Pedagogická poznámka: Nepožaduji po studentech, aby vzorce uměli nazpaměť. Součtové vzorce (stejně jako vzorce, probírané v následujících hodinách) si mohou napsat na speciální papír, který mohou kromě hodin používat i při psaní písemek.

Pedagogická poznámka: Odvození součtových vzorců pro $\sin(x+y)$ a $\cos(x+y)$ v hodinách neprovádím. Je uvedeno na konci hodiny pro zájemce.

Př. 3: Dokaž platnost vztahu $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Použijeme vzorec $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$, abychom odstranili závorku na pravé straně rovnosti, dosazujeme $y = \frac{\pi}{2}$.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{2} + \sin x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 = \sin x$$

Př. 4: Zjednoduš výraz: $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) &= \cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x - \left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x - \cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6} = 2 \sin x \sin \frac{\pi}{6} = 2 \sin x \frac{1}{2} = \sin x \end{aligned}$$

Pedagogická poznámka: Někteřím studentů dělá problémy pochopit, že za y ve při rozkladu

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \text{ dosazujeme } x.$$

Př. 5: Dokaž rovnost: $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \left(\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\ &= \cos x \cdot \frac{2}{2} + \sin x \cdot \frac{2}{2} = \sin x + \cos x \end{aligned}$$

Př. 6: Dokaž rovnost: $\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x)$

$$\begin{aligned} \sin(\pi - x) &= \sin \pi \cos x - \cos \pi \sin x = 0 \cdot \cos x - (-1) \sin x = \sin x \\ -\sin(\pi + x) &= -(\sin \pi \cos x + \cos \pi \sin x) = -(0 \cdot \cos x + (-1) \sin x) = \sin x \\ -\sin(2\pi - x) &= -(\sin 2\pi \cos x - \cos 2\pi \sin x) = -(0 \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x) = \sin x \end{aligned}$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad slouží k synchronizaci třídy.

Př. 7: Odvod' součtový vzorec pro $\operatorname{tg}(x+y)$.

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\cos x \cos y}} =$$
$$\frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Pedagogická poznámka: Rozšíření zlomku výrazem $\cos x \cos y$ je studentům třeba poradit.

Př. 8: Odvod' součtový vzorec pro $\operatorname{tg}(x-y)$.

Problém: Odvození je příliš dlouhé \Rightarrow použijeme $\operatorname{tg}(x-y) = \operatorname{tg}[x+(-y)]$.

$$\operatorname{tg}(x-y) = \operatorname{tg}[x+(-y)] = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(-y)}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(-y)}$$

Použijeme $\operatorname{tg}(-y) = -\operatorname{tg} y$ ($\operatorname{tg} x$ je lichá funkce).

$$\operatorname{tg}(x-y) = \operatorname{tg}[x+(-y)] = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(-y)}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(-y)} = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Př. 9: Urči přesnou hodnotu $\cos 75^\circ$.

Problém: Známe přesné hodnoty pouze pro tabulkové hodnoty 30° , 45° , 60°
 \Rightarrow zkusíme vyjádřit 75° sčítáním (odčítáním) tabulkových hodnot: $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$.

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Př. 10: Urči přesnou hodnotu $\sin 15^\circ$.

Problém: Známe přesné hodnoty pouze pro tabulkové hodnoty 30° , 45° , 60°
 \Rightarrow zkusíme vyjádřit 15° sčítáním (odčítáním) tabulkových hodnot: $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$.

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Pedagogická poznámka: Můžete vyzvat studenty, aby vysvětlili shodu výsledků dvou předchozích příkladů, případně podiskutovat o způsobu, jak získat přesné hodnoty goniometrických funkcí v dalších bodech.

Př. 11: Vyřeš rovnici: $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin x = 1$.

Problém: Dvě různé goniometrické funkce s různými argumenty \Rightarrow pomocí součtového vzorce rozložíme argument v cosinu, aby uvnitř všech goniometrických funkcí bylo pouze x .

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin x = 1$$

$$\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \sin x = 1$$

$$\cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 + \sin x = 1$$

$$2 \sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{šestinové úhly v kladné polorovině} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, x_2 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi.$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

Př. 12: Vyřeš rovnici: $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$.

Problém: Dvě různé goniometrické funkce s různými argumenty \Rightarrow pomocí součtových vzorců rozložíme argumenty obou cosinů, aby uvnitř všech goniometrických funkcí bylo pouze x .

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$$

$$\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x = 1$$

$$\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = 1$$

$$2 \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos x \sqrt{2} = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{čtvrtinové úhly v kladné polorovině na ose } x \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, x_2 = \frac{7}{4}\pi + k \cdot 2\pi.$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi; \frac{7}{4}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

Př. 13: Vyřeš nerovnici: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

Problém: Závorky u obou sinů se nerovnajíc, nemůžeme tedy substituovat \Rightarrow rozložíme pomocí součtových vzorců.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} - \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) > 0$$

$$\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} - \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} > 0$$

$$2 \cos x \sin \frac{\pi}{4} > 0$$

$$2 \cos x \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

$$\cos x > 0$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right)$$

Př. 14: Petáková:

strana 47, cvičení 55 a), c), e)

strana 47, cvičení 56 d), e)

strana 47, cvičení 57 b), d), h), l)

strana 54, cvičení 22 a), g), h)

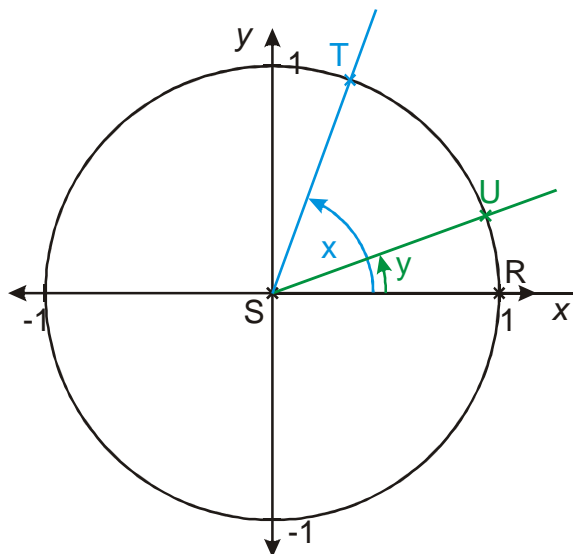
Pedagogická poznámka: Následující odvození o hodinách vynechávám, učebnice ho obsahuje pouze kvůli případným zájemcům, přesto je odvození psáno stylem, který v učebnici používám pro vysvětlování normální látky, aby v důležitých místech studenti získali čas a důvod na rozmyšlenou.

Pedagogická poznámka: V podstatě sledujeme odvození z učebnice Goniometrie: Odvárko, Prometheus.

Odvození součtových vzorců

K odvození součtových vzorců použijeme jednotkovou kružnici.

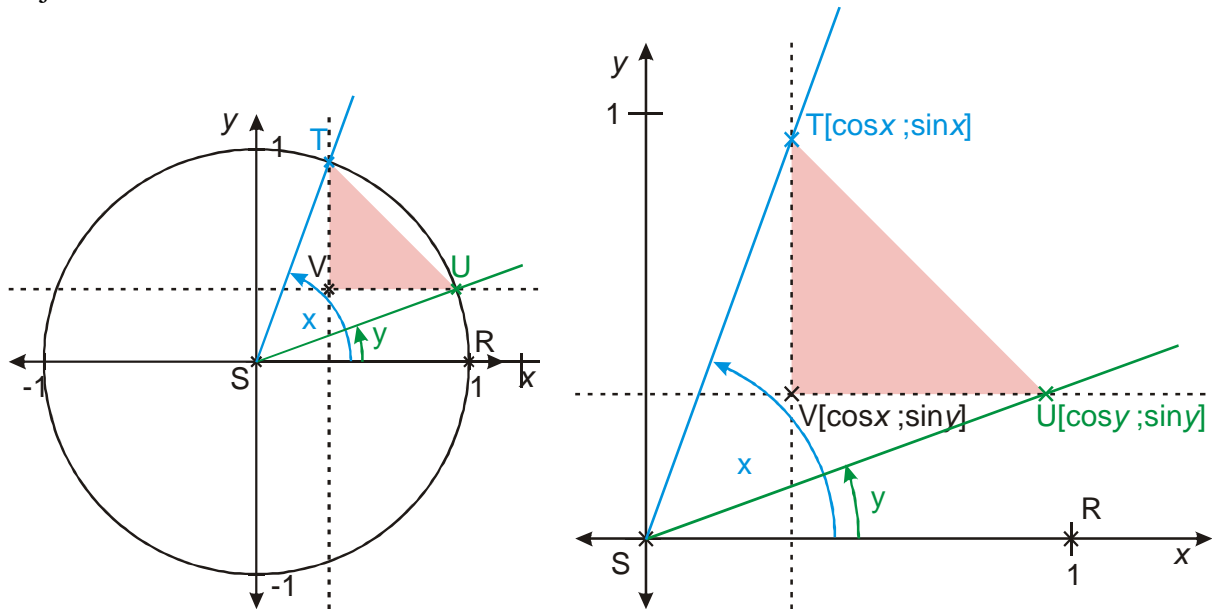
Zakreslíme do obrázku jednotkové kružnice dva orientované úhly $x = \widehat{RST}$, $y = \widehat{RSU}$, tak aby platilo $x > y$.



Př. 15: Urči souřadnice bodů R, T, U souřadné soustavě Sxy .

Platí: $R[1;0]$, $T[\cos x, \sin y]$, $U[\cos y, \sin x]$.

Bodem T vedeme rovnoběžku s osou x , bodem U rovnoběžku s osou y . Vznikne tak pravoúhlý trojúhelník TUV .



Př. 16: Urči délky stran trojúhelníku TUV .

Z obrázku vidíme: $|VU| = |\cos x - \cos y|$, $|TV| = |\sin x - \sin y|$.

Délku přepony určíme pomocí Pythagorovy věty: $c^2 = a^2 + b^2$.

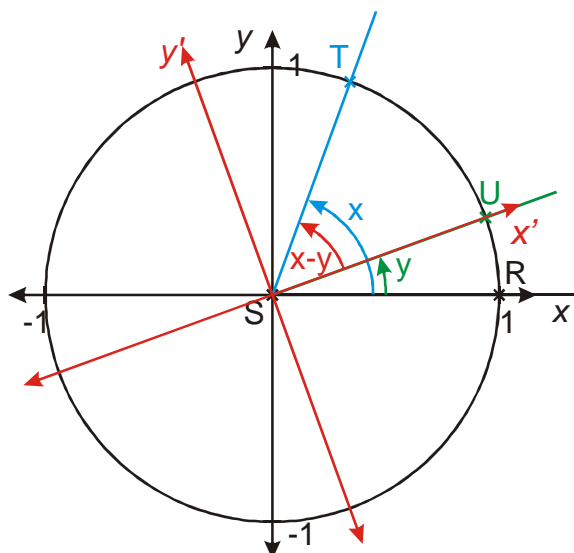
$$|TU|^2 = |\cos x - \cos y|^2 + |\sin x - \sin y|^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$$

$$|TU|^2 = \cos^2 x - 2 \cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2 \sin x \sin y + \sin^2 y$$

$$|TU|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y - 2 \cos x \cos y - 2 \sin x \sin y$$

$$|TU|^2 = 1 + 1 - 2 \cos x \cos y - 2 \sin x \sin y = 2(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

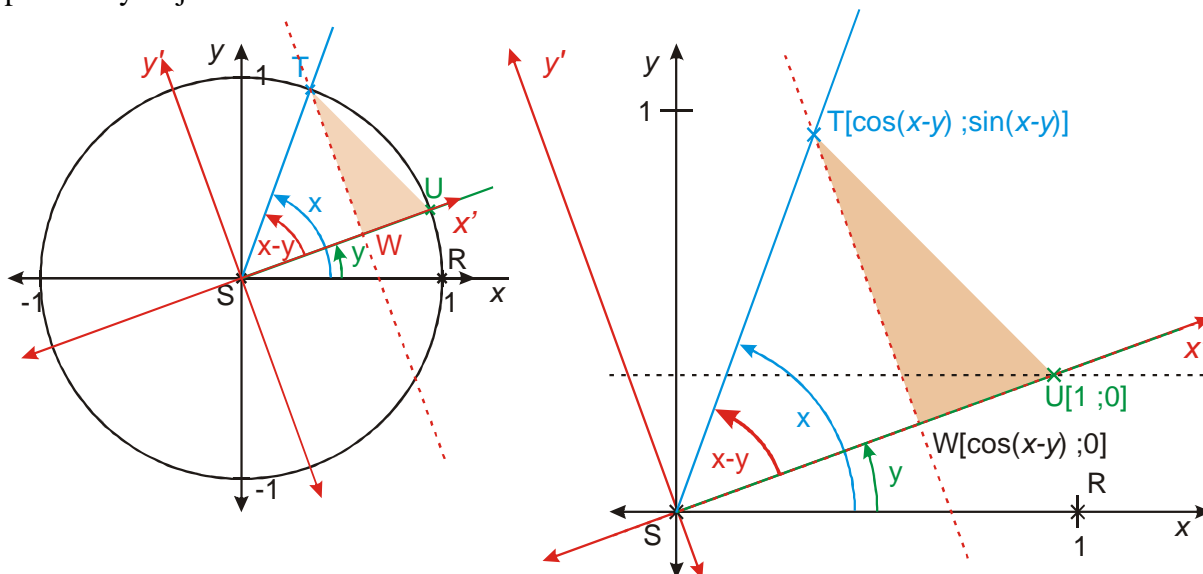
Nyní zopakujeme celý postup vzhledem k nové soustavě souřadnic $Sx'y'$, kterou získáme otočením soustavy Sxy o úhel $y = \widehat{RSU}$.



Př. 17: Urči souřadnice bodů T, U souřadné soustavy $Sx'y'$.

Platí: $T[\cos(x-y), \sin(x-y)]$, $U[1,0]$.

Bodem T vedeme rovnoběžku s osou y' , bodem U rovnoběžku s osou x' . Vznikne tak pravoúhlý trojúhelník TUW .



Př. 18: Urči délky stran trojúhelníku TUV .

Z obrázku vidíme: $|WU| = |1 - \cos(x-y)|$, $|TW| = |\sin(x-y)|$.

Délku přepony určíme pomocí Pythagorovy věty: $c^2 = a^2 + b^2$.

$$|TU|^2 = |1 - \cos(x-y)|^2 + |\sin(x-y)|^2 = [1 - \cos(x-y)]^2 + [\sin(x-y)]^2$$

$$|TU|^2 = 1 - 2\cos(x-y) + \cos^2(x-y) + \sin^2(x-y) = 1 - 2\cos(x-y) + 1$$

$$|TU|^2 = 2 - 2\cos(x-y) = 2[1 - \cos(x-y)]$$

Otočením soustavy souřadnic se nemůže změnit vzdálenost bodů $T, U \Rightarrow$ obě vyjádření délky úsečky TU musí být shodné: $2[1 - \cos(x - y)] = 2(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y)$.

$$1 - \cos(x - y) = 1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ - jeden ze vzorců, které jsme si ukázali na začátku hodiny.

Odvození není zcela kompletní. Musíme ověřit případy, které jsme vynechali v našich předpokladech:

$$x > y, x, y \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Ověření pro $x = y, x, y \in \langle 0; 2\pi \rangle$: Dosadíme do odvozeného vzorce: $x = y$:

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(x - x) = \cos x \cos x + \sin x \sin x$$

$$\cos 0 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 - \text{platí.}$$

Ověření pro $x < y, x, y \in \langle 0; 2\pi \rangle$:

$$\cos(x - y) = \cos[-(y - x)] = \cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$$

Platí: $\cos[-(y - x)] = \cos(y - x)$, protože $\cos x$ je sudá funkce.

Ověření pro $x, y \in R$:

Víme, že pro $x, y \in R$ existují: $x_0, y_0 \in \langle 0; 2\pi \rangle$ a $k, m \in Z$, tak, že platí:

$$x = x_0 + k \cdot 2\pi, y = y_0 + m \cdot 2\pi$$

Dosadíme do obou stran vzorce (využijeme periodičnost funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$):

$$\cos(x - y) = \cos[x_0 + k \cdot 2\pi - (y_0 + m \cdot 2\pi)] = \cos[x_0 - y_0 + (k - m) \cdot 2\pi] = \cos(x_0 - y_0)$$

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y =$$

$$\cos(x_0 + k \cdot 2\pi) \cos(y_0 + m \cdot 2\pi) + \sin(x_0 + k \cdot 2\pi) \sin(y_0 + m \cdot 2\pi) =$$

$$\cos x_0 \cos y_0 + \sin x_0 \sin y_0$$

Odvození vztahu $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$:

$$\text{Platí: } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cos x + \sin\frac{\pi}{2} \sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x.$$

$$\text{Platí: } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \text{ (předchozí vztah).}$$

$$\sin(x + y) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x + y)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right] = \cos x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin y =$$

$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Jsme z nyní získaných odvodili již v začátku hodiny pomocí přezávorkování a využitím sudosti a lichosti goniometrických funkcí.

Shrnutí: Rozkládat výrazy uvnitř goniometrických funkcí můžeme pouze pomocí goniometrických vzorců.