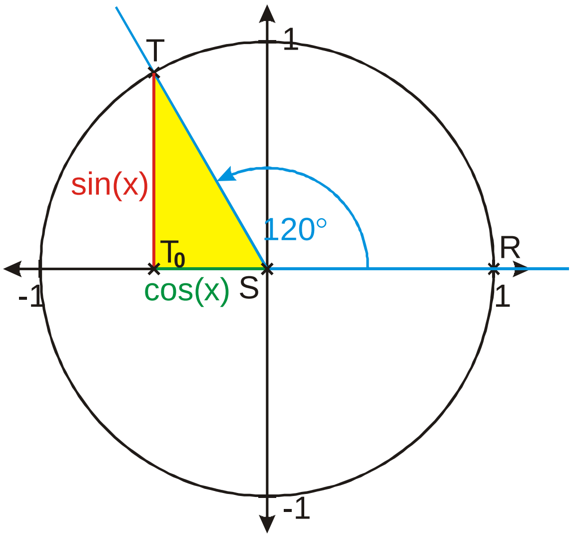
4.3.3 Základní goniometrické vzorce I

Předpoklady: 4301

Dva vzorce, oba známe už z prváku.

Pro každé $x \in R$ **platí:** $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$**.**

Důkaz:
Použijeme definici obou funkcí v jednotkové kružnici:



Obě funkce jsou souřadnice bodu T na jednotkové kružnici $\Rightarrow$ body STT_0 tvoří pravoúhlý trojúhelník $\Rightarrow$ platí Pythagorova věta $|ST_0|^2 + |T_0T|^2 = |ST|^2 = 1$ (bod T leží na jednotkové kružnici).

Př. 1: Urči hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě x, jestliže platí $\sin x = \frac{3}{5}$ a zároveň $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Hodnotu $\cos x$ určíme ze vzorce: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
$|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ (protože $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$)
$|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$
$\cos x$ je v intervalu $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ záporný $\Rightarrow$ $\cos x = -\frac{4}{5}$
Hodnoty ostatních funkcí zjistíme s definičních vztahů:

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$.

Př. 2: Urči hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě *x*, jestliže platí $\cos x = -\frac{1}{3}$ a zároveň $\sin x < 0$. Rozhodni, do kterého z intervalů $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, $\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$ a $\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$ náleží úhel *x*.

Hodnotu $\sin x$ určíme ze vzorce: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$|\sin x| = \sqrt{1-\cos^2 x}$ $\qquad$ (protože $\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$)

$|\sin x| = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $(\sin x < 0)$

Hodnoty ostatních funkcí zjistíme s definičních vztahů:

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$ $\qquad$ $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Protože hodnoty $\sin x$ i $\cos x$ jsou záporné, leží koncové rameno orientovaného úhlu *x* ve třetím kvadrantu a platí tedy $x \in \left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$.

Př. 3: Urči, kdy je definován výraz $\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, a pak jej zjednoduš.

Definiční obor: Musí být definovány všechny funkce ve výrazu :

- $\operatorname{tg} x$ není definován pro $x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$,
- $\operatorname{cotg} x$ není definován pro $x = 0 + k\cdot\pi$,

$\Rightarrow$ musíme vyloučit $x \neq \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi; 0+k\cdot\pi\right\} = \bigcup_{k\in Z}\left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$.

Žádné další hodnoty *x* vyloučit nemusíme, protože ve jmenovateli zlomku je součet druhé mocniny a jedničky, tedy číslo vždy kladné.

Upravujeme výraz:

$$\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \operatorname{cotg}^2 x$$

Druhý vzorec:

Pro každé $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$**, kde** $k \in Z$ **platí:** $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$**.**

Vzorec se používá i v jiných tvarech: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$ nebo $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ ..

Př. 4: Vysvětli, proč je ve vzorci uvedena podmínka $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$.

Jak jsme zjistili při řešení příkladu 3, pro $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$ není vždy jedna z obou funkcí $\operatorname{tg} x$ nebo $\operatorname{cotg} x$ definována $\Rightarrow$ nemá smysl uvažovat o platnosti vztahu $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

Př. 5: Dokaž platnost vztahu $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

Dosadíme: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} \frac{\cos x}{\sin x} = 1$$
$$1 = 1$$

Př. 6: Zjednoduš výraz $\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ pomocí vzorce $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

$$\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\frac{1}{\operatorname{cotg}^2 x}} = \frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{\frac{\operatorname{cotg}^2 x+1}{\operatorname{cotg}^2 x}} = \frac{\operatorname{cotg}^2 x\left(1+\operatorname{cotg}^2 x\right)}{\operatorname{cotg}^2 x+1} = \operatorname{cotg}^2 x$$

Př. 7: Odhadni výsledek, který vznikne zjednodušením výrazu $\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{cotg}^2 x}$. Odhad potvrď výpočtem.

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{tg}^2 x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \operatorname{tg}^2 x$$

Umíme určit hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě *x*, pokud známe hodnotu $\sin x$ nebo $\cos x$ a znaménko druhé funkce (případně interval). Dokážeme určit hodnoty i v případě, že budeme znát hodnoty $\operatorname{tg} x$ ($\operatorname{cotg} x$)?

Zkusíme určit hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě *x*, jestliže platí $\operatorname{tg} x = -2$ a zároveň $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi \right)$.

Snadno určíme $\operatorname{cotg} x$: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1 \Rightarrow \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\frac{1}{2}$.

Hodnoty dalších funkcí: vztahy $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -2$ i $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$
z obou vztahů získáme rovnici: $\sin x = -2\cos x \Rightarrow$ nevede k cíly (1 rovnice na dvě neznámé) $\Rightarrow$ musíme přidat další rovnici $\Rightarrow$ použijeme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow$ 2 rovnice na dvě neznámé, šlo by to, ale jde to i rychleji.

Rychlejší postup: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad / : \cos^2 x$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow |\cos x| = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

V intervalu $\left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi \right)$ jsou hodnoty $\cos x$ kladné $\Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (-2)$$

$$\sin x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Pedagogická poznámka: Předchozí postup ukážu studentům rychle na tabuli s tím, že si jej nemají opisovat. Postup si zachytí do sešitu při řešení následujícího příkladu (který je velmi podobný). Při jeho řešení nechávám předchozí postup na tabuli.

Př. 8: Urči hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě *x*, jestliže platí $\operatorname{cotg} = \sqrt{2}$ a zároveň $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

Podobný postup jako výše:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad / : \sin^2 x \qquad$ (potřebujeme získat zlomek $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$)

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\operatorname{cotg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow |\sin x| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

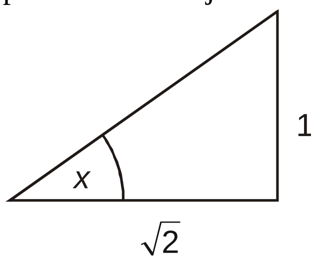
V intervalu $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ jsou hodnoty $\sin x$ kladné $\Rightarrow$ $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ $\Rightarrow$ $\cos x=\sin x\cdot\operatorname{cotg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

Př. 9: Vyřeš předchozí příklad pomocí pravoúhlého trojúhelníku.

Pro $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ jsou hodnoty všech goniometrických funkcí kladné.

Platí: $\operatorname{cotg}=\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ poměr odvěsen pravoúhlého trojúhelníku $\operatorname{cotg} x=\frac{\textit{přilehlá}}{\textit{protilehlá}}$ s úhlem x je $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ hodnoty goniometrických funkcí můžeme určovat například z následujícího pravoúhlého trojúhelníku:



Délka přepony: $c^2=a^2+b^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2=3$ $\Rightarrow$ $c=\sqrt{3}$.

Hodnoty zbývajících goniometrických funkcí:

$\sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

Pedagogická poznámka: Postup z příkladu 9 je sice méně elegantní a exaktní, ale pro většinu studentů snáze přijatelný. Ve skutečnosti si podobný trojúhelník můžeme nakresli i pro úhly se základní velikostí mimo interval $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Z pravoúhlého trojúhelníku si určíme absolutní hodnoty hodnot goniometrických funkcí a znaménka zjistíme z polohy koncového ramene úhlu.

Př. 10: Petáková: strana 44, cvičení 45 c)

Pedagogická poznámka: Při procvičování úprav je dokazování rovností zařazeno před zjednodušování výrazů záměrně. Při dokazování rovností mohou studenti používat i ekvivalentní úpravy (násobení rovnic apod.), které se potom někteří snaží uplatnit i u výrazů. Opět je v takovém případě (až po chybách) potřeba třídu upozornit, že jde o dva rozdílné úkoly, které je nutné řešit různými způsoby.

Př. 11: Urči, kdy je definovaná rovnost $\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{1+\sin(-x)}{\cos(-x)}$, a pak ji dokaž.

Na obou stranách rovnosti jsou zlomky $\Rightarrow$ nesmíme dělit nulou:

- $1+\sin x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq -1 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}\pi + k\cdot 2\pi,\ k\in Z$
- $\cos(-x)\neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\ k\in Z$

$\Rightarrow\ x\in R-\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\right\}$

Odstraníme znaménka uvnitř funkcí: $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=-\cos x$.

$\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{\cos x} \quad /\cdot(1+\sin x)\cos x$

$\cos x\cdot\cos x=(1-\sin x)(1+\sin x)$

$\cos^2 x = 1-\sin^2 x$

$\cos^2 x=\cos^2 x$

Př. 12: Urči definiční obory následujících rovností a dokaž je.

a) $\sin x\cdot \operatorname{tg} x\cdot\cos x = 1-\cos^2 x$ b) $\sin^4 x-\cos^4 x = 1-2\cos^2 x$

c) $2\sin x\cos x+\operatorname{tg} x\operatorname{cotg} x=\left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}+\frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x}\right)^2$

a) $\sin x\cdot \operatorname{tg} x\cdot\cos x = 1-\cos^2 x$

Rovnost obsahuje funkci $\operatorname{tg} x \Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, kde $k\in Z \Rightarrow x\in R-\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right\}$.

$\sin x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos x=\sin^2 x$

$\sin^2 x=\sin^2 x \Rightarrow$ rovnost platí.

b) $\sin^4 x-\cos^4 x=1-2\cos^2 x$

$x\in R$

$(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos^2 x$

$(\sin^2 x-\cos^2 x)\cdot 1=\sin^2 x-\cos^2 x \Rightarrow$ rovnost platí.

c) $2\sin x\cos x+\operatorname{tg} x\operatorname{cotg} x=\left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}+\frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x}\right)^2$

Rovnost obsahuje funkci $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x \Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x\neq 0+k\pi \Rightarrow x\neq 0+k\frac{\pi}{2}$, kde $k\in Z$.

Tím jsme vyřešili i hodnoty *x*, pro které platí $\operatorname{tg} x=0$ nebo $\operatorname{cotg} x$ (když je jedna z těchto funkcí nulová, druhá není definována) $\Rightarrow x\in R-\bigcup_{k\in Z}\left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$.

$$2\sin x\cos x+\operatorname{tg}x\operatorname{cotg}x=\left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}+\frac{\cos x}{\operatorname{cotg}x}\right)^2$$

$$2\sin x\cos x+1=\left(\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}}+\frac{\cos x}{\frac{\cos x}{\sin x}}\right)^2$$

$$2\sin x\cos x+1=(\cos x+\sin x)^2$$

$$2\sin x\cos x+1=\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x$$

$2\sin x\cos x+1=2\sin x\cos x+1 \Rightarrow$ rovnost platí.

Př. 13: Urči definiční obor výrazu a poté ho zjednoduš.

a) $\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ b) $\dfrac{\sin x+\cos x}{1+\operatorname{tg}x}$ c) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{cotg}x}$

d) $\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\left(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x\right)+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$

a) $\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

Definiční obor: dělíme $\Rightarrow$ $1-\cos x\neq 0$ $\Rightarrow$ $\cos x\neq 1$ $\Rightarrow$ $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$

$$x\in R-\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\right\}$$

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}=1+\cos x$$

b) $\dfrac{\sin x+\cos x}{1+\operatorname{tg}x}$

Definiční obor:

- dělíme $\Rightarrow$ $1+\operatorname{tg}x\neq 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{tg}x\neq -1$ $\Rightarrow$ $x\neq -\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$
- $\operatorname{tg}x$ $\Rightarrow$ $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

$$x\in R-\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi;-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi\right\}$$

$$\frac{\sin x+\cos x}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{\sin x+\cos x}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{\sin x+\cos x}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}=\cos x$$

c) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{cotg}x}$

Definiční obor:

- dělíme $\Rightarrow$ $\operatorname{cotg}x\neq 0$ $\Rightarrow$ $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$

- $\operatorname{tg} x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\operatorname{cotg} x \Rightarrow x \neq k\pi$

$x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{cotg} x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

d) $\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \left(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x \right) + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

Definiční obor: $\operatorname{tg} x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\operatorname{cotg} x \Rightarrow x \neq k\pi$

$x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \left(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x \right) + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \left(\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \right) + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x \right)^2 = 1^2 = 1$$

Př. 14: Petáková:
strana 45, cvičení 47 c), f), i), m)
strana 45, cvičení 46 b), c), e), h), m)

Shrnutí: Platí $\sin^2 + \cos^2 x = 1$ (pravoúhlý trojúhelník) a $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$ (definice).