

4.3.3 Základní goniometrické vzorce I

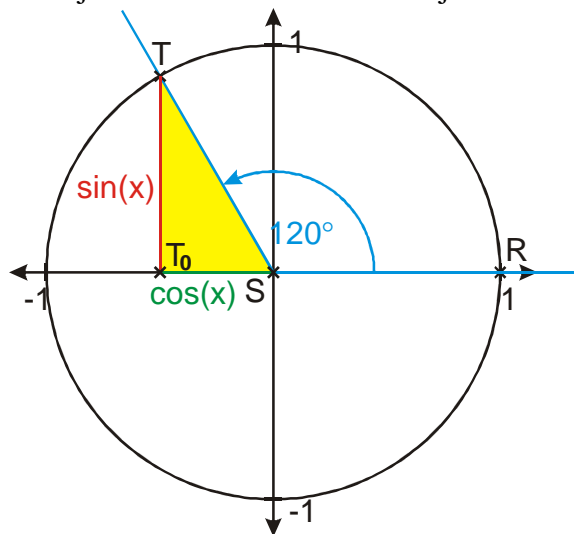
Předpoklady: 4301

Dva vzorce, oba známe už z prváku.

Pro každé $x \in R$ platí: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Důkaz:

Použijeme definici obou funkcí v jednotkové kružnici:



Obě funkce jsou souřadnice bodu T na jednotkové kružnici \Rightarrow body STT_0 tvoří pravoúhlý trojúhelník \Rightarrow platí Pythagorova věta $|ST_0|^2 + |T_0T|^2 = |ST|^2 = 1$ (bod T leží na jednotkové kružnici).

Př. 1: Urči hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě x , jestliže platí $\sin x = \frac{3}{5}$ a

$$\text{zároveň } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

Hodnotu $\cos x$ určíme ze vzorce: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad (\text{protože } \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|)$$

$$|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos x \text{ je v intervalu } \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right) \text{ záporný } \Rightarrow \cos x = -\frac{4}{5}$$

Hodnoty ostatních funkcí zjistíme s definičních vztahů:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}.$$

Př. 2: Urči hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě x , jestliže platí $\cos x = -\frac{1}{3}$ a zároveň $\sin x < 0$. Rozhodni, do kterého z intervalů $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$ a $\left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$ náleží úhel x .

Hodnotu $\sin x$ určíme ze vzorce: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x} \qquad (\text{protože } \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|)$$

$$|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\sin x < 0)$$

Hodnoty ostatních funkcí zjistíme s definičních vztahů:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Protože hodnoty $\sin x$ i $\cos x$ jsou záporné, leží koncové rameno orientovaného úhlu x ve třetím kvadrantu a platí tedy $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$.

Př. 3: Urči, kdy je definován výraz $\frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, a pak jej zjednoduš.

Definiční obor: Musí být definovány všechny funkce ve výrazu :

- $\operatorname{tg} x$ není definován pro $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
- $\operatorname{cotg} x$ není definován pro $x = 0 + k \cdot \pi$,

$$\Rightarrow \text{musíme vyloučit } x \neq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; 0 + k \cdot \pi \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Žádné další hodnoty x vyloučit nemusíme, protože ve jmenovateli zlomku je součet druhé mocniny a jedničky, tedy číslo vždy kladné.

Upravujeme výraz:

$$\frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \operatorname{cotg}^2 x$$

Druhý vzorec:

Pro každé $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$ platí: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

Vzorec se používá i v jiných tvarech: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$ nebo $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$..

Př. 4: Vysvětli, proč je ve vzorci uvedena podmínka $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Jak jsme zjistili při řešení příkladu 3, pro $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$ není vždy jedna z obou funkcí $\operatorname{tg} x$ nebo $\operatorname{cotg} x$ definována \Rightarrow nemá smysl uvažovat o platnosti vztahu $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

Př. 5: Dokaž platnost vztahu $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

Dosadíme: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \frac{\cos x}{\sin x} = 1$$

$$1 = 1$$

Př. 6: Zjednoduš výraz $\frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ pomocí vzorce $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

$$\frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{1 + \frac{1}{\operatorname{cotg}^2 x}} = \frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{\frac{\operatorname{cotg}^2 x + 1}{\operatorname{cotg}^2 x}} = \frac{\operatorname{cotg}^2 x (1 + \operatorname{cotg}^2 x)}{\operatorname{cotg}^2 x + 1} = \operatorname{cotg}^2 x$$

Př. 7: Odhadni výsledek, který vznikne zjednodušením výrazu $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$. Odhad potvrď výpočtem.

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \operatorname{tg}^2 x$$

Umíme určit hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě x , pokud známe hodnotu $\sin x$ nebo $\cos x$ a znaménko druhé funkce (případně interval). Dokážeme určit hodnoty i v případě, že budeme znát hodnoty $\operatorname{tg} x$ ($\operatorname{cotg} x$)?

Zkusíme určit hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě x , jestliže platí $\operatorname{tg} x = -2$ a zároveň $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

$$\text{Snadno určíme } \operatorname{cotg} x: \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1 \Rightarrow \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Hodnoty dalších funkcí: vztahy } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \text{ i } \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

z obou vztahů získáme rovnici: $\sin x = -2 \cos x \Rightarrow$ nevede k cíli (1 rovnice na dvě neznámé) \Rightarrow musíme přidat další rovnici \Rightarrow použijeme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow$ 2 rovnice na dvě neznámé, šlo by to, ale jde to i rychleji.

$$\text{Rychlejší postup: } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad /: \cos^2 x$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow |\cos x| = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{V intervalu } \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right) \text{ jsou hodnoty } \cos x \text{ kladné} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (-2)$$

$$\sin x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Pedagogická poznámka: Předchozí postup ukážu studentům rychle na tabuli s tím, že si jej nemají opisovat. Postup si zachytí do sešitu při řešení následujícího příkladu (který je velmi podobný). Při jeho řešení nechávám předchozí postup na tabuli.

Př. 8: Urči hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě x , jestliže platí $\operatorname{cotg} = \sqrt{2}$ a

$$\text{zároveň } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Podobný postup jako výše:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad /: \sin^2 x \quad (\text{potřebujeme získat zlomek } \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x})$$

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\operatorname{cotg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow |\sin x| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

V intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ jsou hodnoty $\sin x$ kladné $\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

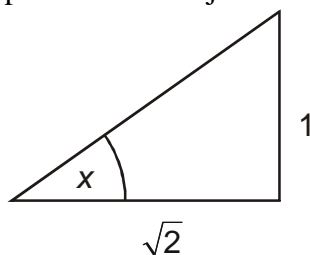
$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cos x = \sin x \cdot \cotg x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Př. 9: Vyřeš předchozí příklad pomocí pravoúhlého trojúhelníku.

Pro $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ jsou hodnoty všech goniometrických funkcí kladné.

Platí: $\cotg = \sqrt{2} \Rightarrow$ poměr odvěsen pravoúhlého trojúhelníku $\cotg x = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}}$ s úhlem x

je $\sqrt{2} \Rightarrow$ hodnoty goniometrických funkcí můžeme určovat například z následujícího pravoúhlého trojúhelníku:



Délka přepony: $c^2 = a^2 + b^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$.

Hodnoty zbývajících goniometrických funkcí:

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Pedagogická poznámka: Postup z příkladu 9 je sice méně elegantní a exaktní, ale pro většinu studentů snáze přijatelný. Ve skutečnosti si podobný trojúhelník můžeme nakreslit i pro úhly se základní velikostí mimo interval $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Z pravoúhlého trojúhelníku si určíme absolutní hodnoty hodnot goniometrických funkcí a znaménka zjistíme z polohy koncového ramene úhlu.

Př. 10: Petáková: strana 44, cvičení 45 c)

Pedagogická poznámka: Při procvičování úprav je dokazování rovností zařazeno před zjednodušování výrazů záměrně. Při dokazování rovností mohou studenti používat i ekvivalentní úpravy (násobení rovnic apod.), které se potom někteří snaží uplatnit i u výrazů. Opět je v takovém případě (až po chybách) potřeba třídu upozornit, že jde o dva rozdílné úkoly, které je nutné řešit různými způsoby.

Př. 11: Urči, kdy je definovaná rovnost $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin(-x)}{\cos(-x)}$, a pak ji dokaž.

Na obou stranách rovnosti jsou zlomky \Rightarrow nesmíme dělit nulou:

- $1 + \sin x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq -1 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi, k \in Z$
- $\cos(-x) \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in Z$

$$\Rightarrow x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right\}$$

Odstraníme znaménka uvnitř funkcí: $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$.

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \quad / \cdot (1 + \sin x) \cos x$$

$$\cos x \cdot \cos x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \cos^2 x$$

Př. 12: Urči definiční obory následujících rovností a dokaž je.

a) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \cos x = 1 - \cos^2 x$ b) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$

c) $2 \sin x \cos x + \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = \left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x} \right)^2$

a) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \cos x = 1 - \cos^2 x$

Rovnost obsahuje funkci $\operatorname{tg} x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z \Rightarrow x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\}$.

$$\sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x = \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \sin^2 x \Rightarrow \text{rovnost platí.}$$

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$

$$x \in R$$

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \cos^2 x$$

$$(\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot 1 = \sin^2 x - \cos^2 x \Rightarrow \text{rovnost platí.}$$

c) $2 \sin x \cos x + \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = \left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x} \right)^2$

Rovnost obsahuje funkci $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq 0 + k\pi \Rightarrow x \neq 0 + k \frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$.

Tím jsme vyřešili i hodnoty x , pro které platí $\operatorname{tg} x = 0$ nebo $\operatorname{cotg} x$ (když je jedna z těchto

funkcí nulová, druhá není definována) $\Rightarrow x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$.

$$2 \sin x \cos x + \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = \left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x} \right)^2$$

$$2 \sin x \cos x + 1 = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2$$

$$2 \sin x \cos x + 1 = (\cos x + \sin x)^2$$

$$2 \sin x \cos x + 1 = \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos x + 1 = 2 \sin x \cos x + 1 \Rightarrow \text{rovnost platí.}$$

Př. 13: Urči definiční obor výrazu a poté ho zjednoduš.

$$\text{a) } \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \quad \text{b) } \frac{\sin x + \cos x}{1 + \operatorname{tg} x} \quad \text{c) } \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{cotg} x}$$

$$\text{d) } \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x) + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$\text{a) } \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

Definiční obor: dělíme $\Rightarrow 1 - \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

$$x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right\}$$

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$$

$$\text{b) } \frac{\sin x + \cos x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

Definiční obor:

- dělíme $\Rightarrow 1 + \operatorname{tg} x \neq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x \neq -1 \Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

- $\operatorname{tg} x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \right\}$$

$$\frac{\sin x + \cos x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}} = \cos x$$

$$\text{c) } \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{cotg} x}$$

Definiční obor:

- dělíme $\Rightarrow \operatorname{cotg} x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

- $\operatorname{tg} x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\operatorname{cotg} x \Rightarrow x \neq k\pi$

$$x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{cotg} x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{\sin x}} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

d) $\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x) + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

Definiční obor: $\operatorname{tg} x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\operatorname{cotg} x \Rightarrow x \neq k\pi$

$$x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x) + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \left(\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \right) + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1^2 = 1$$

Př. 14: Petáková:

strana 45, cvičení 47 c), f), i), m)

strana 45, cvičení 46 b), c), e), h), m)

Shrnutí: Platí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (pravoúhlý trojúhelník) a $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$ (definice).