

4.3.2 Goniometrické nerovnice

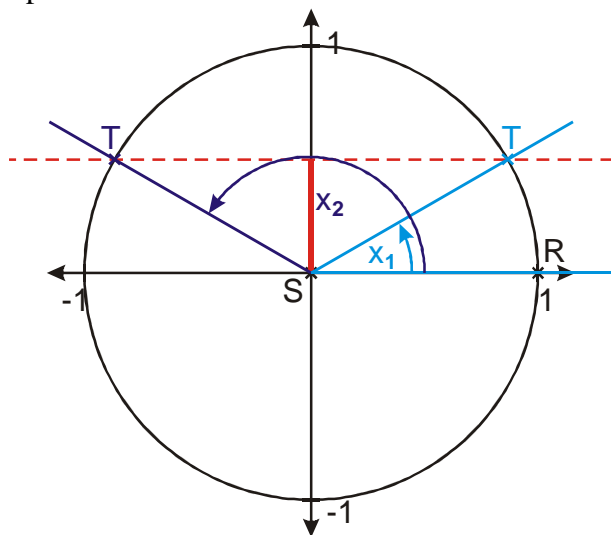
Předpoklady: 4301

Pedagogická poznámka: Nerovnice je stejně jako rovnice možné řešit grafem i jednotkovou kružnicí. Oba způsoby mají své výhody i nevýhody a jsou v podstatě rovnocenné. Po vyřešení prvních čtyř příkladů nechávám studentům svobodu volby. Při řešení nerovnic, které obsahují tg nebo cotg používáme grafy funkcí.

Spojíme zkušenosti, které máme s řešením nerovnic, s minulou hodinou.

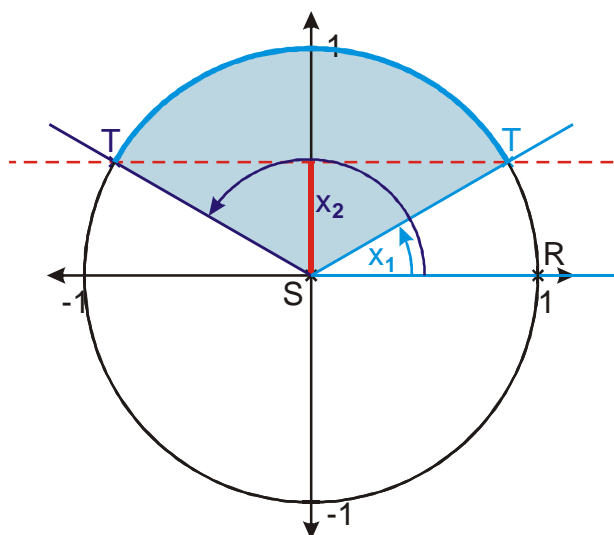
Př. 1: Vyřeš nerovnici $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

Umíme vyřešit rovnici $\sin x = \frac{1}{2}$. Nakreslíme jednotkovou kružnici a vyřešíme nerovnost s pomocí obrázku.



$$\text{Řešení rovnice } x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5}{6}\pi.$$

Na jednotkové kružnici hledáme čísla, pro která $\sin x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ mají y -ovou souřadnici větší (nebo rovnou) $\frac{1}{2} \Rightarrow$ jsou výše (nebo stejně vysoko) než čísla vyhovující rovnici $\sin x = \frac{1}{2}$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla
v intervalu $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi \right\rangle$.

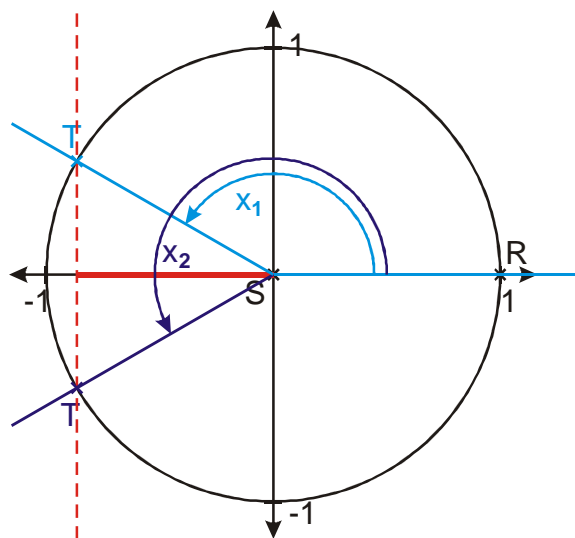
Hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow$ řešením je každý interval $\left\langle \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$.

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$$

Poznámka: Řešení předchozího příkladu je velmi podobné způsobu, kterým řešíme kvadratické nerovnice: najdeme kořeny rovnice a pomocí obrázku jednotkové kružnice (místo grafu používaného u kvadratických nerovnic) hledáme správné intervaly.

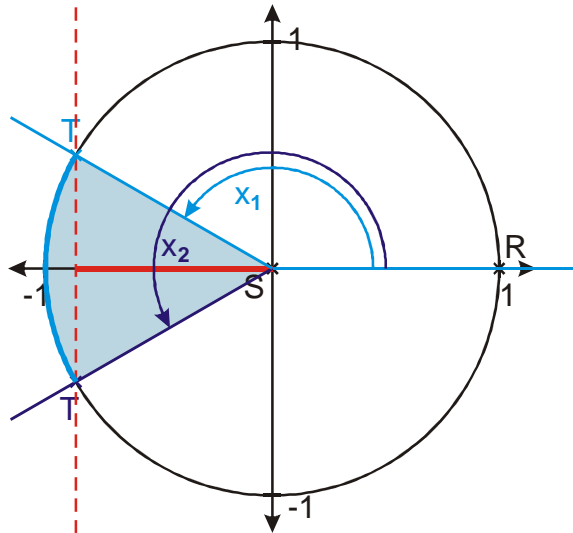
Př. 2: Vyřeš nerovnici $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kromě jednotkové kružnice využij i graf funkce $y = \cos x$.

Umíme vyřešit rovnici $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Řešení rovnice $x_1 = \frac{5}{6}\pi$, $x_2 = \frac{7}{6}\pi$.

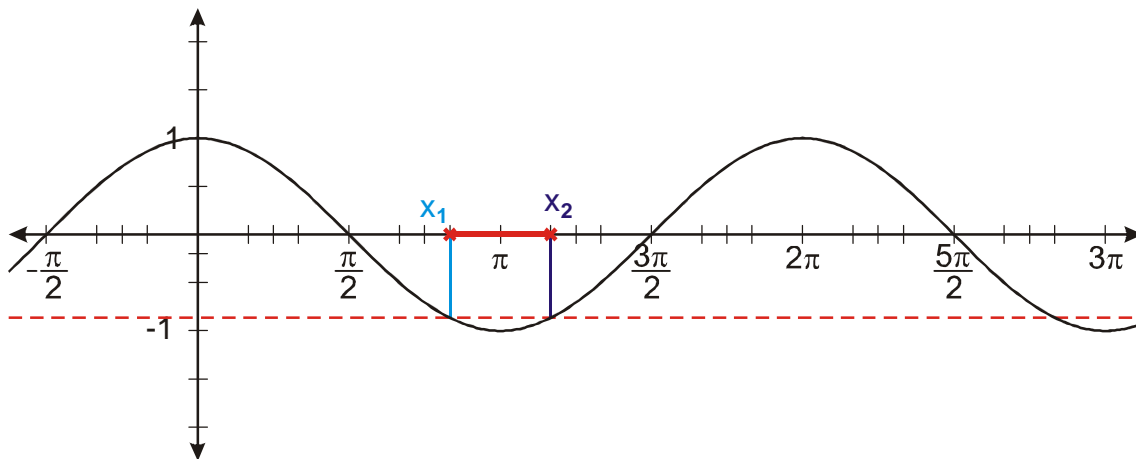
Na jednotkové kružnici hledáme čísla, pro která $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ mají x -ovou souřadnici menší (nebo rovnou) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ jsou více vlevo (nebo stejně vlevo) jako čísla vyhovující rovnici $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left\langle \frac{5}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi \right\rangle$.

Kontrola pomocí grafu funkce $y = \cos x$.

Do grafu vyznačíme hodnotu $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:



Na ose x hledáme čísla, pro která $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ hodnoty funkce jsou menší (nebo jsou rovny) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ jsou níže (nebo stejně níže) jako body přímky $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

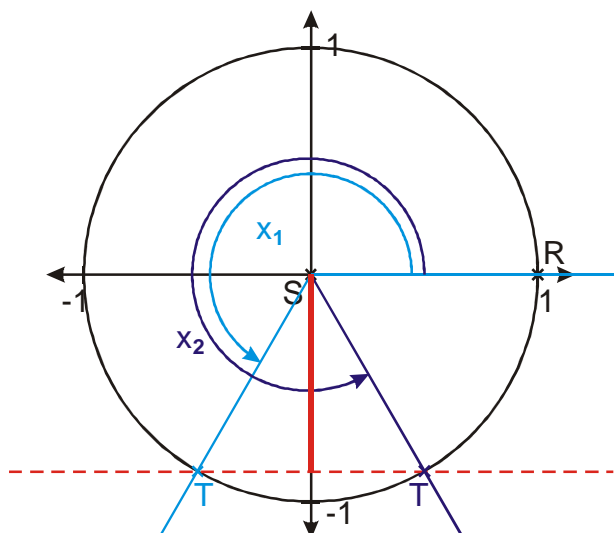
Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left\langle \frac{5}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi \right\rangle$.

Hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow$ řešením je každý interval $\left\langle \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$.

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$$

Pedagogická poznámka: U slabších studentů povolují, aby ve všech následujících příkladech používali metodu, která je pro ně jednodušší.

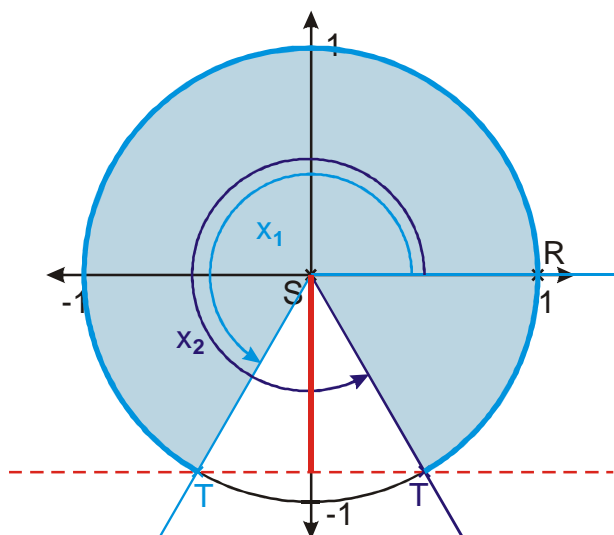
Př. 3: Vyřeš nerovnici $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Při řešení využij obrázek jednotkové kružnice.



Základní řešením rovnice $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x_1 = \frac{4}{3}\pi, \quad x_2 = \frac{5}{3}\pi.$$

Hledáme čísla, pro která $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ mají y -ovou souřadnici větší než $-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ leží na jednotkové kružnici výše než čísla vyhovující rovnici $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Vybarvená čísla nemůžeme zapsat intervaly:

- $\left\langle \frac{5}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi \right\rangle$ (v intervalu píšeme vždy nejdříve menší číslo)
- $\left\langle \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi \right\rangle$ (ten obsahuje mimo krajní body čísla, která nejsou řešením nerovnice)

\Rightarrow použijeme pro jeden z krajních bodů číslo, které není v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle \Rightarrow$ dvě možnosti:

- $\frac{5}{3}\pi - 2\pi = -\frac{1}{3}\pi \Rightarrow$ získáme interval $\left\langle -\frac{1}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi \right\rangle$,
- $\frac{4}{3}\pi + 2\pi = \frac{10}{3}\pi \Rightarrow$ získáme interval $\left\langle \frac{5}{3}\pi; \frac{10}{3}\pi \right\rangle$.

Oba předchozí intervaly jsou navzájem posunuté o 2π .

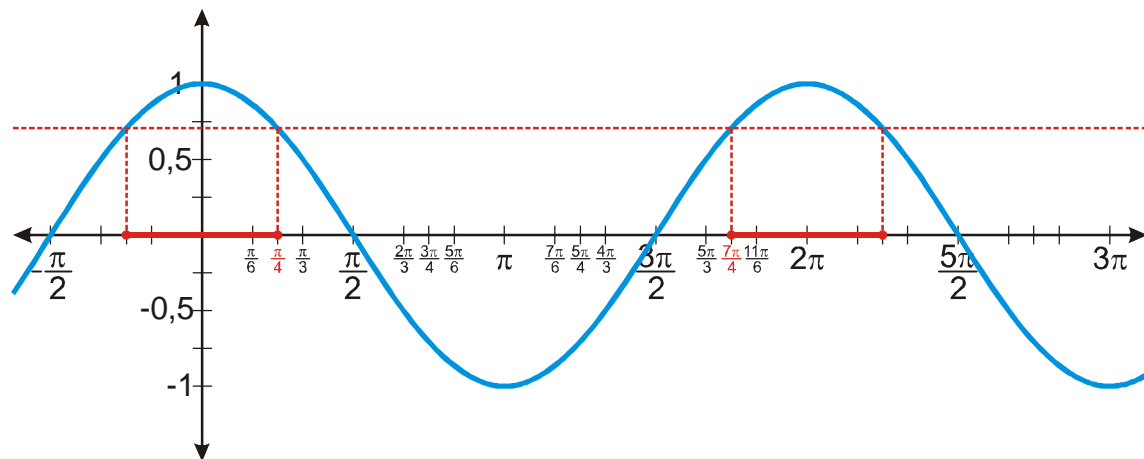
Hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow$ řešením je každý interval $\left\langle -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$.

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Při řešení využij graf funkce $y = \cos x$.

Rovnice $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ má v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ dvě řešení: $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{7}{4}\pi$.

Nakreslíme graf funkce a zobrazíme do něj hodnotu $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Řešení v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ bychom museli zapsat pomocí dvou intervalů $\left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{4}\pi; 2\pi \right\rangle$.

Zápis se značně zjednoduší, když vybereme čísla mimo interval $\langle 0; 2\pi \rangle$:

- řešení pomocí intervalu kolem 0 $\Rightarrow \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$,
- řešení pomocí intervalu kolem $2\pi \Rightarrow \left\langle \frac{7}{4}\pi; \frac{11}{4}\pi \right\rangle$.

Oba předchozí intervaly jsou navzájem posunuté o 2π .

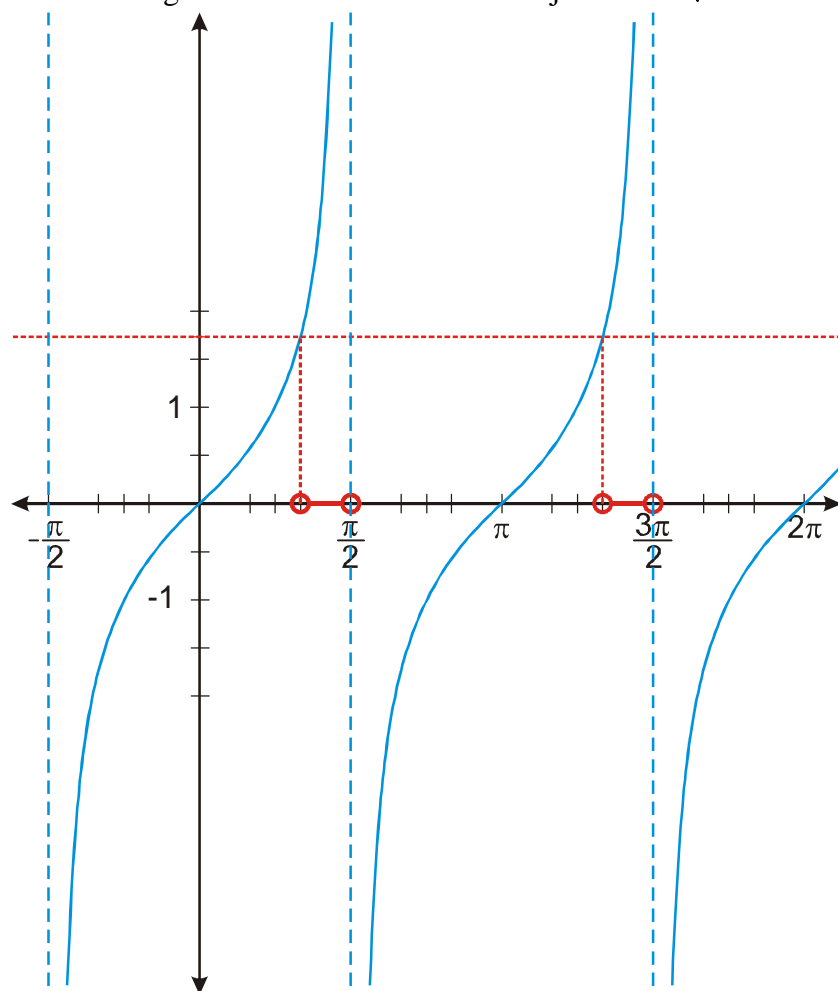
Hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow$ řešením je každý interval $\left\langle -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \right\rangle$.

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \right\rangle$$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

Rovnice $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ má v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ jediné řešení: $x = \frac{\pi}{3}$.

Nakreslíme graf funkce a zobrazíme do něj hodnotu $\sqrt{3}$.



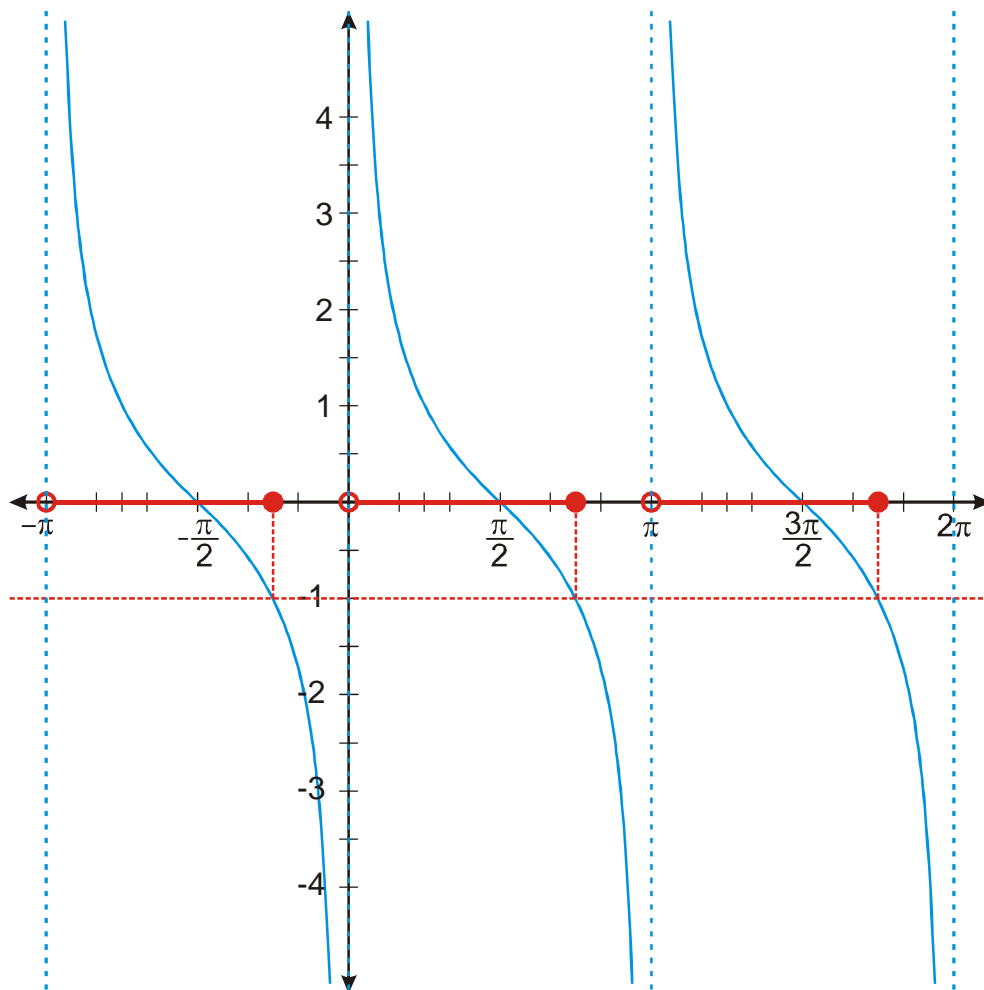
Řešení v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ můžeme zapsat jako $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, hodnoty funkce $y = \operatorname{tg} x$ se

opakují s periodou $\pi \Rightarrow K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$.

Př. 6: Vyřeš nerovnici $\operatorname{cotg} x \geq -1$.

Rovnice $\operatorname{cotg} x = -1$ má v intervalu $(0; \pi)$ jediné řešení: $x = \frac{3}{4}\pi$.

Nakreslíme graf funkce a zobrazíme do něj hodnotu -1 .



Řešení v intervalu $(0; \pi)$ můžeme zapsat jako $\left(0; \frac{3}{4}\pi\right)$, hodnoty funkce $y = \cotg x$ se

opakují s periodou $\pi \Rightarrow K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(0 + k \cdot \pi; \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi\right)$.

Pedagogická poznámka: Před řešením následujících příkladů je dobré zdůraznit dvě věci: jde o těžší příklady, které nemusí zvládnout každý (on je také zdaleka každý nestihne),

k jejich řešení není třeba nic nového mimo využití postupů, které jsme používali už dříve u jiných typů rovnic.

Př. 7: Vyřeš nerovnici $-\frac{1}{2} < \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problém: Nerovnice obsahuje dvě nerovnosti \Rightarrow dvě možnosti řešení:

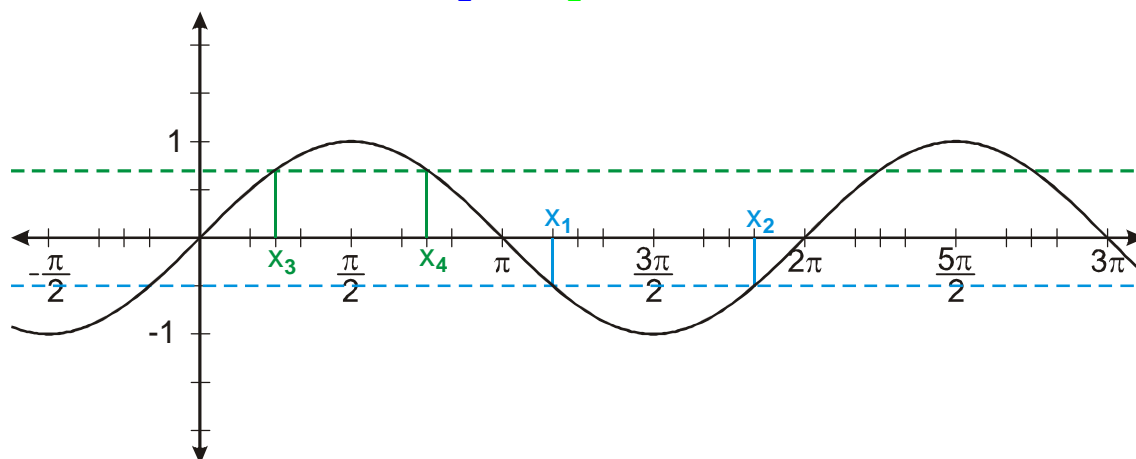
- vyřešíme každou nerovnost samostatně a výsledek určíme jako průnik obou řešení (musí platit obě nerovnosti současně) \Rightarrow nevýhoda – dvojí práce s kreslením grafu (nebo kružnice),

- samostatně řešíme pouze rovnice $\sin x = -\frac{1}{2}$ a $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, získané úhly nakreslíme do jednoho obrázku, kde rovnou určíme řešení (rychlejší postup s menší pravděpodobností chyby).

Základní řešení rovnic:

- $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{7}{6}\pi, x_2 = \frac{11}{6}\pi$ (šestinové úhly v záporné polorovině),
- $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{\pi}{4}, x_4 = \frac{3}{4}\pi$ (čtvrtinové úhly v kladné polorovině).

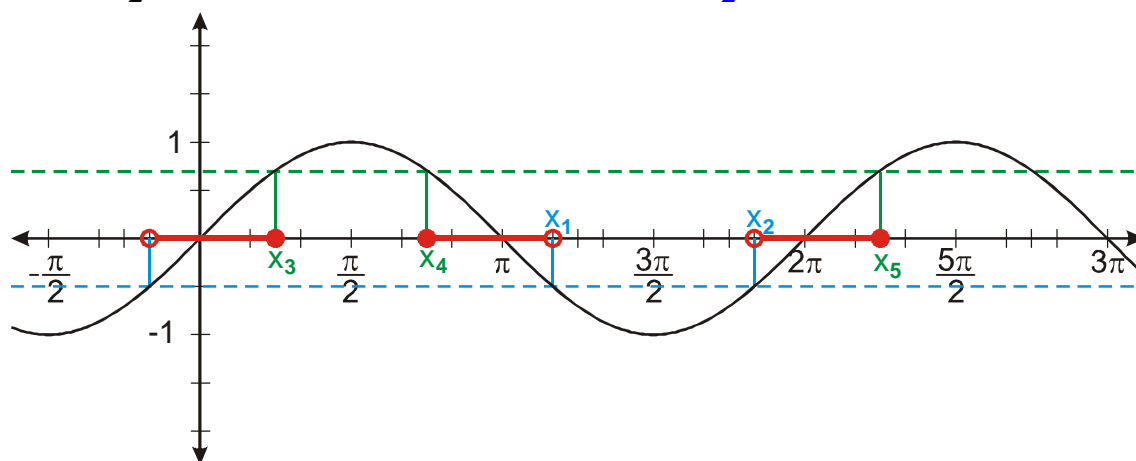
Do grafu vyznačíme přímky $y = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a všechny čtyři určené hodnoty úhlů:



Na ose x hledáme čísla, pro která:

$\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ hodnoty funkce leží pod (nebo stejně nízko) přímkou $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sin x > -\frac{1}{2} \Rightarrow$ hodnoty funkce leží nad přímkou $y = -\frac{1}{2}$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalech $\left\langle \frac{3}{4}\pi; \frac{7}{6}\pi \right\rangle$ a $\left(\frac{11}{6}\pi; \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9}{4}\pi \right)$.

Hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \left\langle \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle \cup \left(\frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{9}{4}\pi + k \cdot 2\pi \right) \right\}$$

Př. 8: Vyřeš nerovnici $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

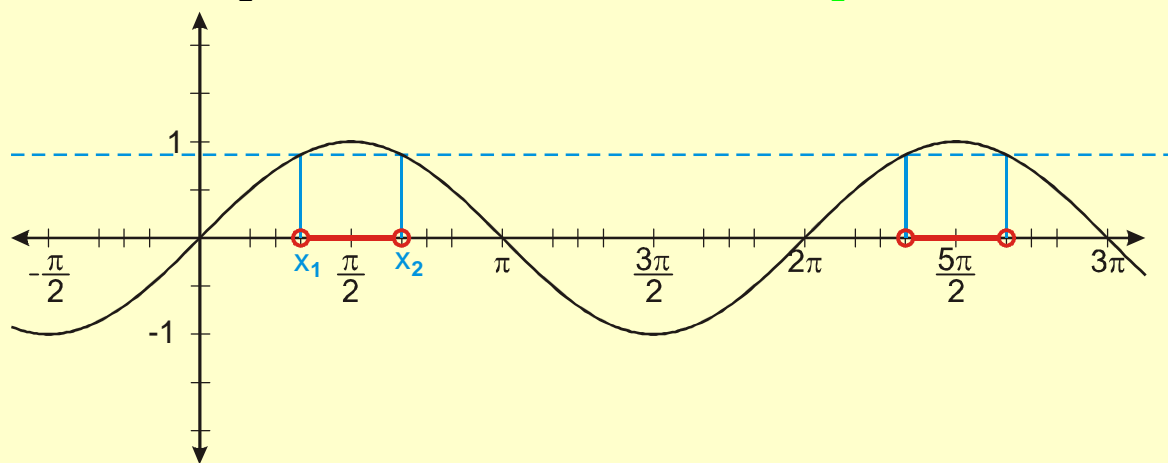
Problém: uvnitř sinu je složitější výraz \Rightarrow substituce.

Substituce: $z = 3x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow$ nerovnice $\sin z > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Základní řešení rovnice: $\sin z = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_1 = \frac{\pi}{3}, z_2 = \frac{2}{3}\pi$ (třetinové úhly v kladné polorovině).

Do grafu vyznačíme přímkou $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a určené hodnoty úhlů z_1, z_2 . Na ose x hledáme čísla,

pro která $\sin z > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ hodnoty funkce leží nad přímkou $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right)$.

Hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi; \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right)$.

Návrat k původní proměnné: (přepočítáme meze a periodu intervalů)

$$z_1 = 3x_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$z_2 = 3x_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$3x_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad / + \frac{\pi}{3}$$

$$3x_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \quad / + \frac{\pi}{3}$$

$$3x_1 = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \quad / : 3$$

$$3x_2 = \pi + k \cdot 2\pi \quad / : 3$$

$$x_1 = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi; \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2}{3}\pi\right)$$

Pedagogická poznámka: Při substituci nepoužíváme standardní označení proměnné y , kvůli možnosti záměny s označením osy y v grafu. Studenti samozřejmě budou y při substituci často používat, pokud se jim nezačne plést s označením osy, není to na závadu.

Př. 9: Vyřeš nerovnici $|\cos x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problém: $\cos x$ je uvnitř absolutní hodnoty \Rightarrow substituce.

Substituce: $a = \cos x \Rightarrow$ nerovnice $|a| = |a - 0| > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hledáme čísla vzdálená od nuly více než o $\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ platí $y \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \infty\right)$.

Přepíšeme interval hodnot $a = \cos x$ pomocí nerovnic:

$$a = \cos x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \infty\right) \Leftrightarrow a = \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ nebo } a = \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

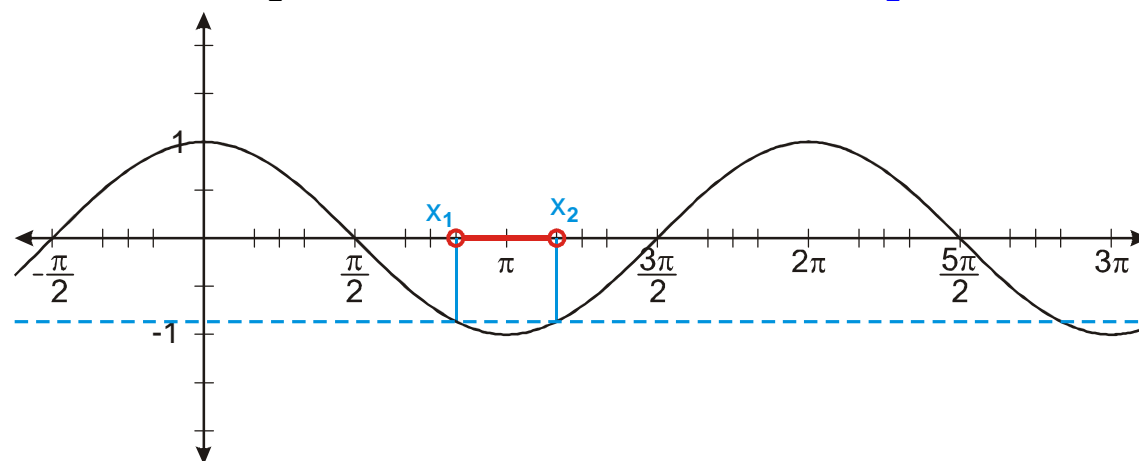
Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť. Protože stačí, aby nalezená hodnota x splňovala jednu z podmínek, získáme celkové řešení jako sjednocení.

a) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Základní řešení rovnice: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{6}\pi, x_2 = \frac{7}{6}\pi$ (šestinové úhly v záporné polorovině osy x).

Do grafu vyznačíme přímkou $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ a určené hodnoty úhlů x_1, x_2 . Na ose x hledáme čísla,

pro která $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ hodnoty funkce leží pod přímkou $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left(\frac{5}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi\right)$, hodnoty se opakují s periodou

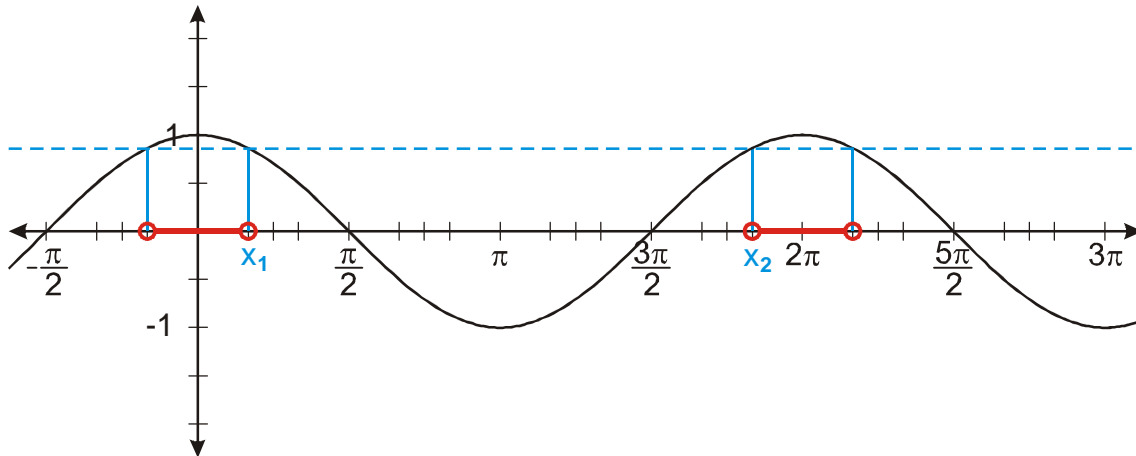
$$2\pi \Rightarrow K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi\right).$$

b) $y = \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Základní řešení rovnice: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{11}{6}\pi$ (šestinové úhly v kladné polorovině osy x).

Do grafu vyznačíme přímkou $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a určené hodnoty úhlů x_1, x_2 . Na ose x hledáme čísla,

pro která $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ hodnoty funkce leží nad přímkou $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$, hodnoty se opakují s periodou

$$2\pi \Rightarrow K_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right).$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) \right\}$$

Př. 10: Vyřeš nerovnici $|2 \sin x - 1| \geq 1$.

Problém: $\sin x$ je uvnitř absolutní hodnoty \Rightarrow substituce.

Substituce: $y = \sin x \Rightarrow$ nerovnice $|2a - 1| \geq 1$.

Nerovnici nemůže ihned interpretovat pomocí vzdálenosti obrazů bodů na číselné ose \Rightarrow

upravíme: $|2a - 1| = 2 \left| a - \frac{1}{2} \right|$

$$2 \left| a - \frac{1}{2} \right| \geq 1 \quad /:2$$

$$\left| a - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{2}$$

Hledáme čísla vzdálená od $\frac{1}{2}$ více než o (nebo přesně o) $\frac{1}{2} \Rightarrow$ platí $a \in (-\infty; 0) \cup \langle 1; \infty \rangle$.

Přepíšeme interval hodnot $a = \sin x$ pomocí nerovnic:

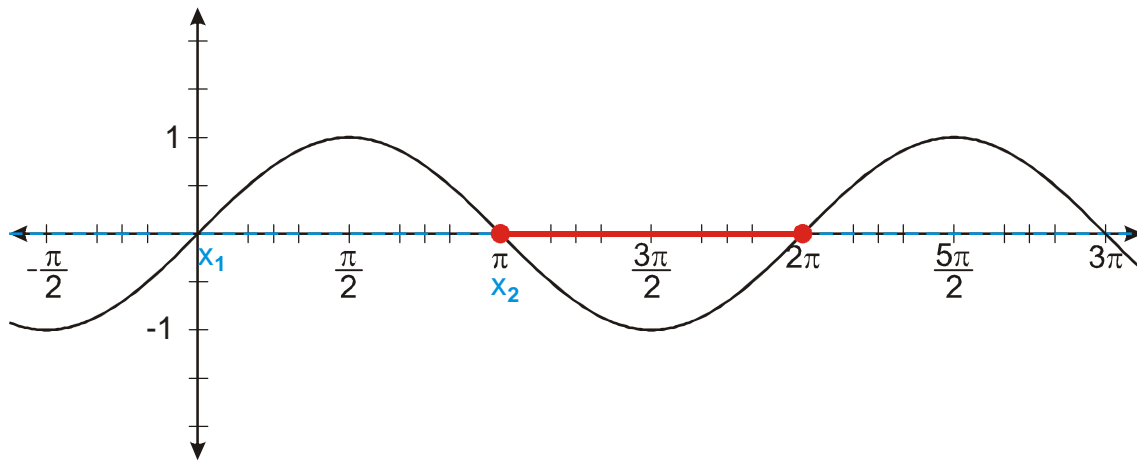
$$a = \sin x \in (-\infty; 0) \cup \langle 1; \infty \rangle \Leftrightarrow a = \sin x \leq 0 \text{ nebo } a = \sin x \geq 1.$$

Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť. Protože stačí, aby nalezená hodnota x splňovala jednu z podmínek, získáme celkové řešení jako sjednocení.

a) $a = \sin x \leq 0$

Základní řešení rovnice: $\sin x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pi$.

Do grafu vyznačíme přímkou $y = 0$ a určené hodnoty úhlů x_1, x_2 . Na ose x hledáme čísla, pro která $\sin x \leq 0 \Rightarrow$ hodnoty funkce leží pod nebo na přímce $y = 0$.



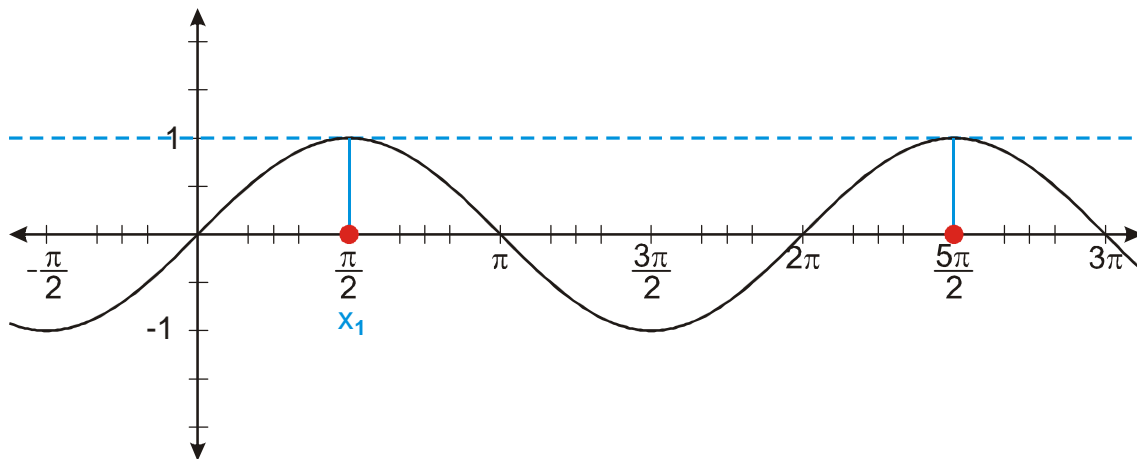
Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\langle \pi; 2\pi \rangle$, hodnoty se opakují s periodou 2π

$$\Rightarrow K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle \pi + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi \rangle.$$

b) $a = \sin x \geq 1$

Základní řešení rovnice: $\sin x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$.

Do grafu vyznačíme přímkou $y = 1$ a určenou hodnotu úhlu x_1 . Na ose x hledáme čísla, pro která $\sin x \geq 1 \Rightarrow$ hodnoty funkce leží nad nebo na přímce $y = 1$.



Řešením nerovnice je číslo $\frac{\pi}{2}$, hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow K_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\}$.

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \langle \pi + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi \rangle \cup \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\}$$

Př. 11: Petáková:

strana 55/cvičení 26 a) b) e) f)

strana 55/cvičení 27 a) b)

Shrnutí: Při řešení goniometrických nerovnic využíváme grafy goniometrických funkcí (nebo znázornění pomocí jednotkové kružnice) a řešení odpovídajících goniometrických rovnic.