

### 4.3.1 Goniometrické rovnice

**Předpoklady:** 4216, 4217

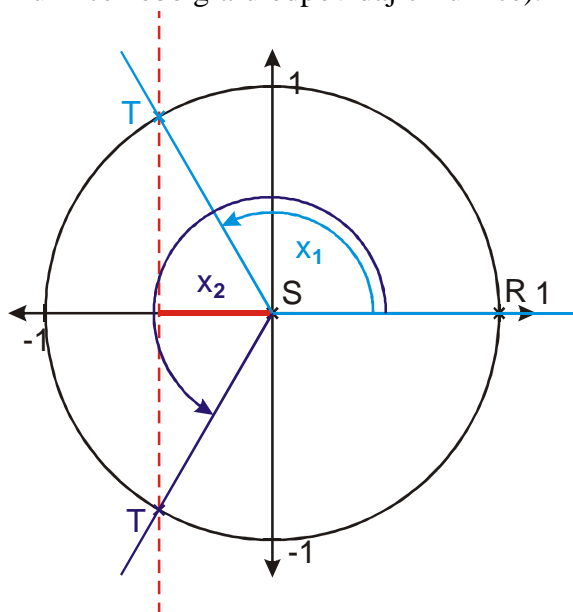
Názvosloví:

- **Goniometrické rovnice:** rovnice, ve kterých se neznámá objevuje uvnitř goniometrických funkcí.
- **Základní goniometrická rovnice:** každá rovnice zapsaná ve tvaru  $g(x) = a$ , kde  $g(x)$  je jedna z goniometrických funkcí ( $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{cotg}$ ),  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- **Základní řešení základní goniometrické rovnice:** množina všech kořenů z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$ .

Důvod: Opakování úhlů po  $2\pi$  (trochu prázdný pojem, protože většina rovnic není základních a jejich kořeny se pak nemusejí opakovat po  $2\pi$ ).

**Př. 1:** Vyřeš rovnici  $\cos x = -\frac{1}{2}$ .

Hledáme všechna  $x \in \mathbb{R}$ , pro něž platí  $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$  to už umíme (pomocí jednotkové kružnice nebo grafu odpovídající funkce).



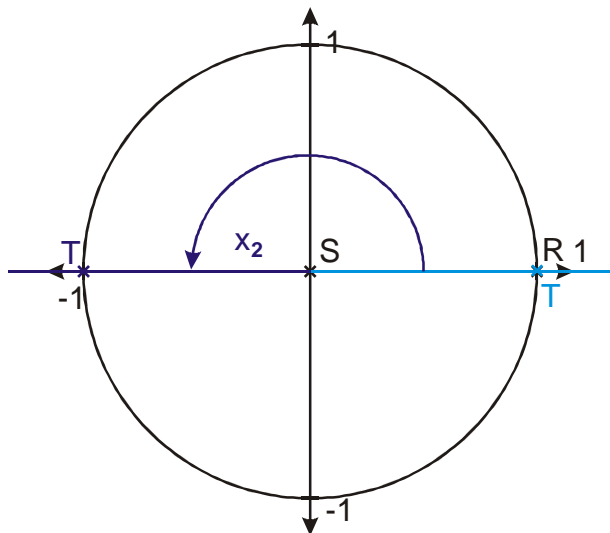
Z obrázku je vidět, že řešením jsou třetinové úhly  $\frac{2}{3}\pi$  a  $\frac{4}{3}\pi$ .

Základní řešení :  $\frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi$ .

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

**Př. 2:** Vyřeš rovnici  $\sin x = 0$ .

Stejně jako předchozí příklad.

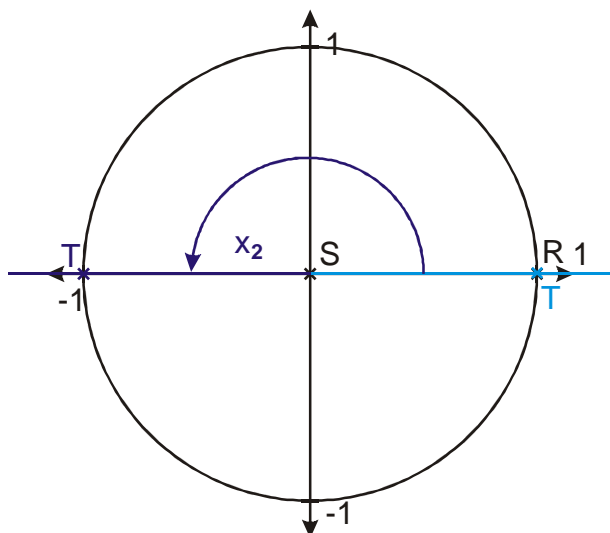


Základní řešení :  $0; \pi$  .

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{0 + k \cdot 2\pi; \pi + k \cdot 2\pi\}$$

Úspornější zápis:  $K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{0 + k \cdot \pi\}$

**Př. 3:** Vyřeš rovnici  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  .

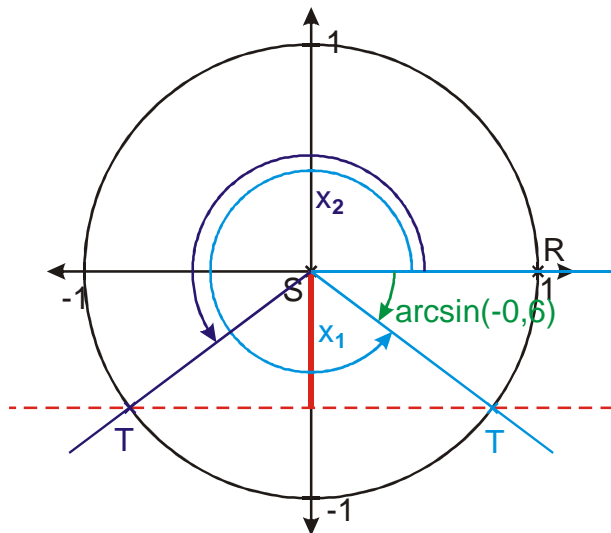


Základní řešení :  $\frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi$  .

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

**Př. 4:** Vyřeš rovnici  $\sin x = -0,6$  .

$-0,6$  není tabulková hodnota  $\Rightarrow$  úhel  $x$  můžeme určit pouze přibližně nebo jako hodnotu funkce  $\arcsin$  . Přibližná hodnota stanovená pomocí kalkulačky je rovna  $\arcsin(-0,6) \doteq -36^\circ 52'$   $\Rightarrow$   $\arcsin(-0,6)$  je tedy záporné číslo, které nepatří do intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  a není tedy základním řešením.



Úhly  $x_1$  a  $x_2$  můžeme vyjádřit dvěma způsoby:

a) pomocí záporného úhlu  $\arcsin(-0,6)$

$$x_1 = 2\pi + \arcsin(-0,6) \qquad x_2 = \pi - \arcsin(-0,6)$$

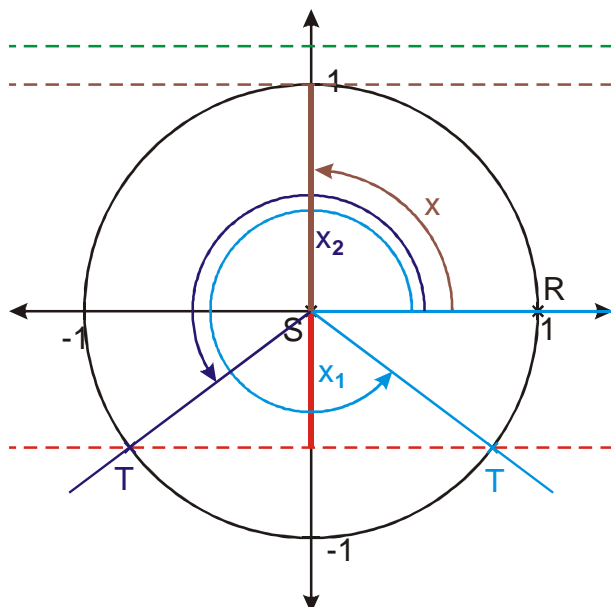
$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\pi - \arcsin(-0,6) + k \cdot 2\pi; 2\pi + \arcsin(-0,6) + k \cdot 2\pi\}$$

b) pomocí kladného úhlu  $\arcsin 0,6$

$$x_1 = 2\pi - \arcsin 0,6 \qquad x_2 = \pi + \arcsin 0,6$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\pi + \arcsin 0,6 + k \cdot 2\pi; 2\pi - \arcsin 0,6 + k \cdot 2\pi\}$$

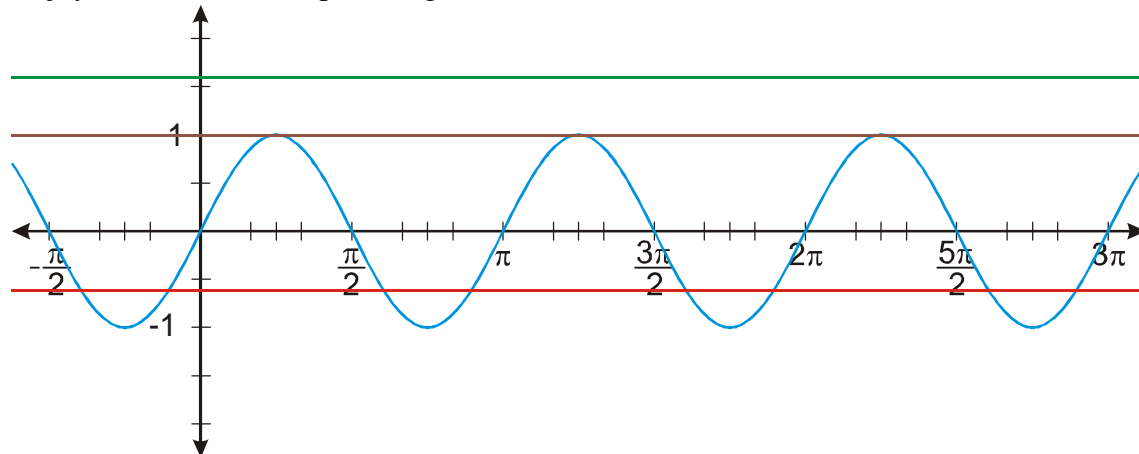
**Př. 5:** Rozhodni, pro která  $a \in \mathbb{R}$  má rovnice  $\sin x = a$  řešení.



Z obrázku je zřejmé, že pro:

- $a \in (-1; 1)$  má rovnice v intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  dvě řešení (červená čára).
- $a = \pm 1$  má rovnice v intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  jedno řešení (hnědá čára).
- $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$  nemá rovnice v intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  žádné řešení (zelená čára).

Stejný závěr dostaneme pomocí grafu:



Rovnice  $\sin x = a$  má řešení pro  $a \in \langle -1; 1 \rangle$ .

V dalších příkladech již nebudeme kreslit kružnice a budeme pokládat vyřešení základní goniometrické rovnice za samozřejmost.

**Př. 6:** Vyřeš rovnici  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ .

Platí:  $\operatorname{tg}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\sqrt{3}$ , funkce  $y = \operatorname{tg} x$  je periodická s nejmenší periodou  $\pi$ .

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi \right\}$$

**Př. 7:** Vyřeš rovnici  $\operatorname{tg} x = 5$ .

5 není tabulková hodnota funkce  $y = \operatorname{tg} x$ , funkce  $y = \operatorname{tg} x$  je periodická s nejmenší periodou  $\pi$ .

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{ \operatorname{arctg} 5 + k \cdot \pi \}$$

**Př. 8:** Vyřeš rovnici  $1 - (\sin x - 1) = 2 - \sqrt{3}(\sqrt{3} \sin x - 1)$ .

**Problém:**  $\sin x$  se nachází uvnitř složitějších výrazů, neznáme jeho hodnotu.

**Substituce:**  $y = \sin x$ .

$$1 - (y - 1) = 2 - \sqrt{3}(\sqrt{3} \cdot y - 1)$$

$$2 - y = 2 - 3y + \sqrt{3}$$

$$2y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$y = \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Základní řešení :  $\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi$ , funkce  $y = \sin x$  je periodická s nejmenší periodou  $2\pi$ .

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

**Př. 9:** Vyřeš rovnici  $\frac{\cos x + \cos \pi}{\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\cos x} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1$ .

**Problém:** V rovnici se vyskytují hodnoty goniometrických funkcí neobsahujících  $x$   
 $\Rightarrow$  dosadíme za ně hodnoty:

$$\frac{\cos x + (-1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\cos x} = 1 + 1.$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cos x$$

$$\frac{\cos x - 1}{\left(-\frac{1}{2}\right)\cos x} = 2$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cos x$$

**Problém:** V rovnici je  $\cos x$  víckrát  $\Rightarrow$  substituce.

**Substituce:**  $y = \cos x$ .

$$\frac{y-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)y} = 2 \quad / \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)y \quad \text{podmínka: } y \neq 0$$

$$y-1 = -y$$

$$2y = 1$$

$$y = \frac{1}{2}$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$y = \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

**Př. 10:** Petáková strana 52, cvičení 3 b), d)

**Př. 11:** Vyřeš rovnici  $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ .

**Problém:** V rovnici se vyskytují hodnoty goniometrických funkcí v druhé mocnině.  
 $\Rightarrow$  substituce.

**Substituce:**  $y = \sin x$

$$2y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$y_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \qquad y_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$y_1 = \sin x_1 = \frac{1}{2} \qquad y_2 = \sin x_2 = -2$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\} \qquad K_2 = \emptyset$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

**Př. 12:** Petáková strana 52, cvičení 7 b)

**Př. 13:** Vyřeš rovnici  $\operatorname{tg} 2x = -1$ .

**Problém:** Uvnitř tangens není pouze  $x$ , ale složitější výraz.

**Substituce:**  $y = 2x$

$$\operatorname{tg} y = -1$$

$$y = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$y = 2x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi \quad / : 2$$

$$x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

**Př. 14:** Vyřeš rovnici  $\cos 0,5x = \frac{1}{2}$ .

**Problém:** Uvnitř sinu není pouze  $x$ , ale složitější výraz.

**Substituce:**  $y = 0,5x$

$$\sin y = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$y_2 = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$y_1 = 0,5x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$y_2 = 0,5x_2 = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$0,5x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad / \cdot 2$$

$$x_1 = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi \right\}$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi; \frac{10}{3}\pi + k \cdot 4\pi \right\}$$

$$0,5x_1 = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \quad / \cdot 2$$

$$x_1 = \frac{10}{3}\pi + k \cdot 4\pi$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{10}{3}\pi + k \cdot 4\pi \right\}$$

**Př. 15:** Vyřeš rovnici  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Problém:** Uvnitř sinu není pouze  $x$ , ale složitější výraz.

**Substitute:**  $y = 3x - \frac{\pi}{2}$

$$\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$y_2 = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$y_1 = 3x_1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$y_2 = 3x_2 - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$3x_1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad / + \frac{\pi}{2}$$

$$3x_2 - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad / + \frac{\pi}{2}$$

$$3x_1 = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad / : 3$$

$$3x_2 = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad / : 3$$

$$x_1 = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$x_2 = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \right\}$$

$$K_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \right\}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \right\}$$

**Dodatek:** Při použití substituce je nutné psát při návratu k původní proměnné hned všechna

řešení i ta dosahovaná díky periodičnosti funkce  $3x_1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ . Pokud na

periodu zapomeneme (šetřící studenti to často dělají, dojdeme ke špatnému výsledku).

Špatný postup:  $3x_1 = \frac{3}{4}\pi \quad / : 3$

$$x_1 = \frac{3}{4}\pi$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \right\}.$$

**Př. 16:** Petáková strana 52, cvičení 6 b), d), h), i)

---

**Shrnutí:**