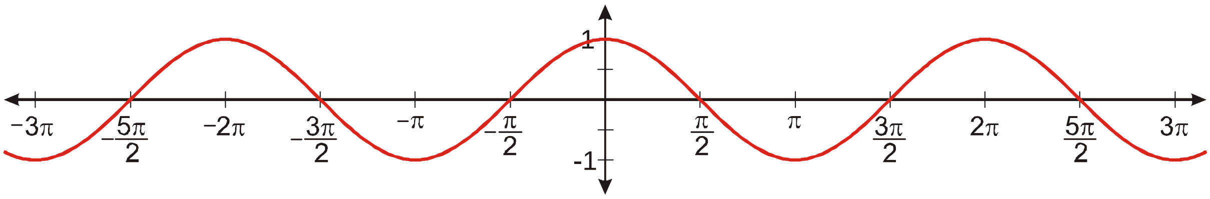
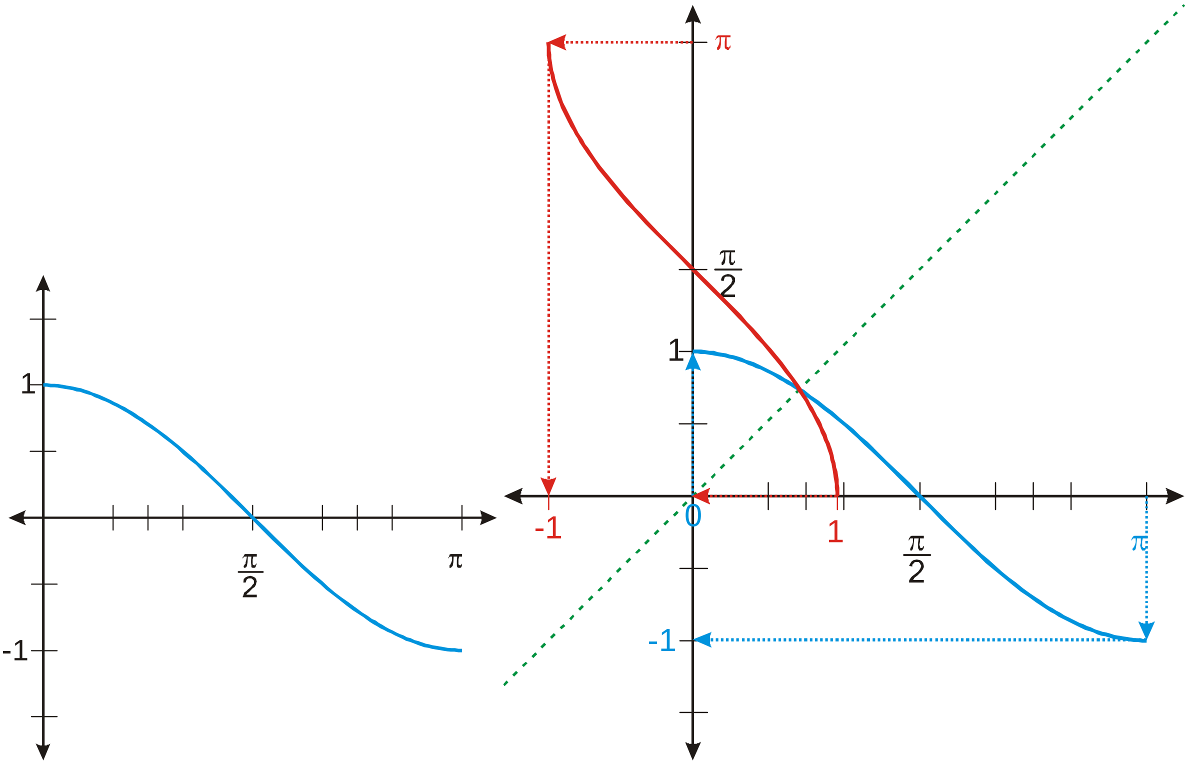
4.2.17 Cyklometrické funkce

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = \cos x$. Omez její definiční obor tak, aby bylo možné nalézt inverzní funkci. Nakresli do nového obrázku graf funkce $y = \cos x$ s omezeným definičním oborem a graf funkce k ní inverzní.





Funkce inverzní k funkci $y = \cos x$ se nazývá $y = \arccos x$ **(arkus kosinus)**.

Př. 2: Srovnej v tabulce vlastnosti funkcí $y = \cos x$ (s omezeným definičním oborem) a $y = \arccos x$.

Př. 3: Urči: a) $\arccos 1$ b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ c) $\arccos 0$

d) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\arccos(-1)$ f) $\arccos(-2)$.

a) $\arccos 1 = 0$ b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$ c) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

d) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ e) $\arccos(-1) = \pi$ f) $\arccos(-2) = neexistuje$

Př. 4: Urči pomocí kalkulačky ve stupních s přesností na minuty přibližné hodnoty:

a) $\arccos 0,2$ b) $\arccos(-0,7)$ c) $\arccos\frac{2}{3}$ d) $\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

a) $\arccos 0,2 \doteq 78°27'$ b) $\arccos(-0,7) \doteq 134°26'$

c) $\arccos\left(\frac{2}{3}\right) \doteq 48°11'$

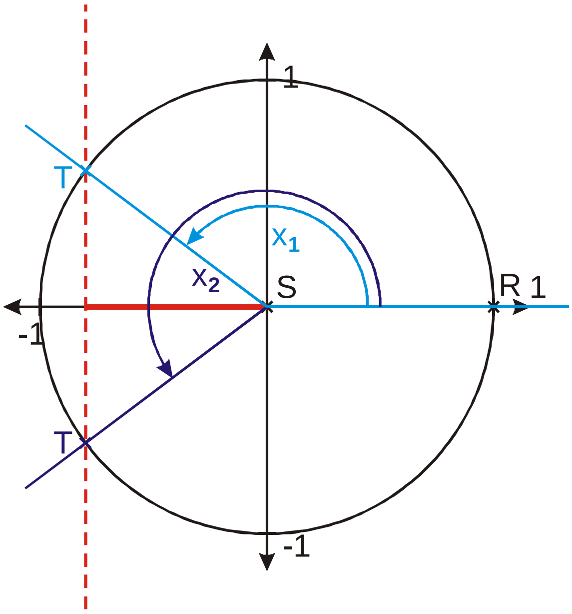
d) $\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \doteq 121°36'$

Př. 5: Urči v obloukové míře: a) $y = \arccos\frac{1}{3}$ b) $\arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Hledané hodnoty nejdříve odhadni, poté je urči s pomocí kalkulačky s přesností na setiny.

a) $\arccos\frac{1}{3} \doteq 1{,}23\,\text{rad}$

b) $\arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \doteq 2{,}47\,\text{rad}$

Př. 6: Najdi všechna x, pro která platí $\cos x = -0{,}8$.

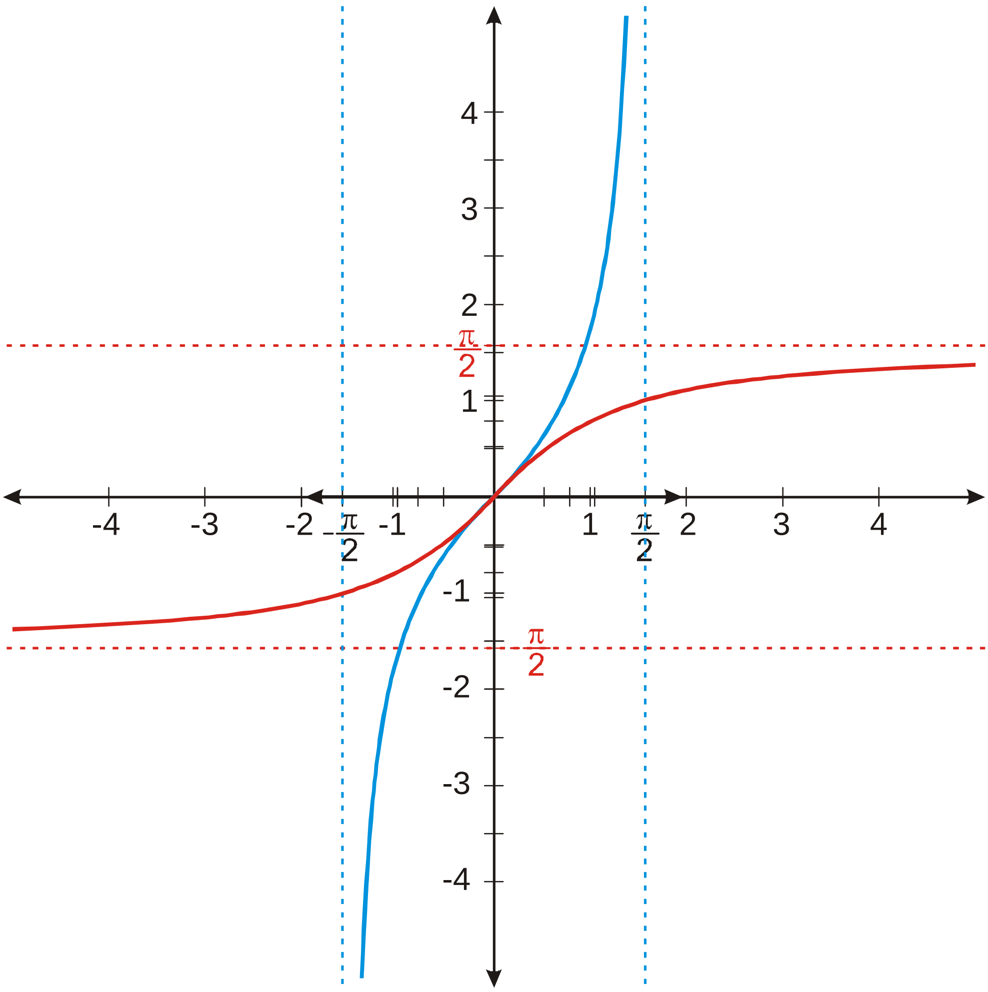


Z obrázku je vidět, že v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ existují dvě hodnoty x, pro které platí $\cos x = -0{,}8$:

$x_1 = \arccos(-0{,}8)$ a $x_2 = 2\pi - \arccos(-0{,}8)$.

Funkce $y = \cos x$ je periodická s nejmenší periodou 2π $\Rightarrow$ $\cos x = -0{,}8$ platí pro všechna čísla $\bigcup_{k \in Z} = \{\arccos(-0{,}8) + k \cdot 2\pi; 2\pi - \arccos(-0{,}8) + k \cdot 2\pi\}$.

Př. 7: Nakresli graf funkce $y = \operatorname{tg} x$. Omez její definiční obor tak, aby bylo možné nalézt inverzní funkci. Nakresli do nového obrázku graf funkce $y = \operatorname{tg} x$ s omezeným definičním oborem a graf funkce k ní inverzní.



Funkce inverzní k funkci $y = \operatorname{tg} x$ se nazývá $y = \operatorname{arctg} x$ **(arkus tangens)**.

Př. 8: Srovnej v tabulce vlastnosti funkcí $y = \operatorname{tg} x$ (s omezeným definičním oborem) a $y = \operatorname{arctg} x$.

Př. 9: Urči: a) $\operatorname{arctg} 1$ b) $\operatorname{arctg} -\sqrt{3}$ c) $\operatorname{arctg} 0$

d) $\operatorname{arctg} -1$ e) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

a) $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ b) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ c) $\operatorname{arctg} 0 = 0$

d) $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ e) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

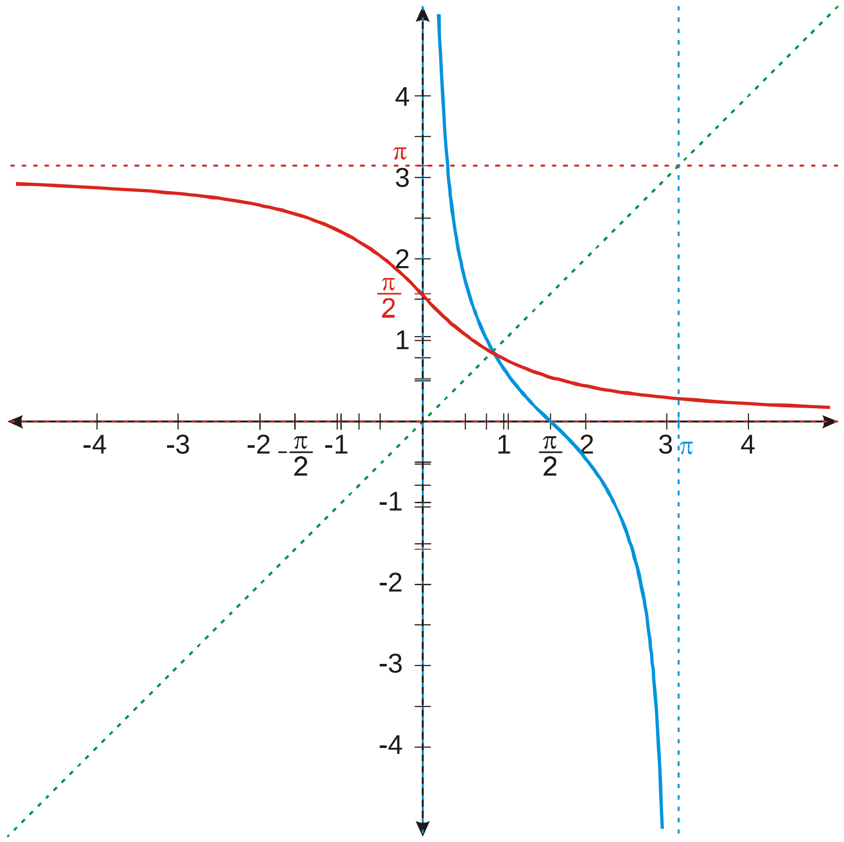
Př. 10: Urči pomocí kalkulačky přibližně ve stupňové míře:
a) $\operatorname{arctg} -10$ b) $\operatorname{arctg} 0,4$ c) $\operatorname{arctg} 2\pi$ d) $\operatorname{arctg} 520$.

a) $\operatorname{arctg}(-10) \doteq -84°17'$ b) $\operatorname{arctg} 0,4 \doteq 21°48'$
c) $\operatorname{arctg} 2\pi \doteq 80°57'$ d) $\operatorname{arctg} 520 \doteq 89°53'$

Př. 11: Najdi všechna *x*, pro která platí $\operatorname{tg} x = 2$.

$\operatorname{tg} x = 2$ platí pro všechna čísla $\bigcup_{k \in Z} = \{\operatorname{arctg} 2 + k \cdot \pi\}$.

Př. 12: Nakresli graf funkce $y = \operatorname{cotg} x$. Omez její definiční obor tak, aby bylo možné nalézt inverzní funkci. Nakresli do nového obrázku graf funkce $y = \operatorname{cotg} x$ s omezeným definičním oborem a graf funkce k ní inverzní.



Funkce inverzní k funkci $y = \operatorname{cotg} x$ se nazývá $y = \operatorname{arccotg} x$ (arkus kotangens).

Př. 13: Srovnej v tabulce vlastnosti funkcí $y = \operatorname{cotg} x$ (s omezeným definičním oborem) a $y = \operatorname{arccotg} x$.

Př. 14: Urči: a) $\operatorname{arcotg} -1$ b) $\operatorname{arccotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ c) $\operatorname{arccotg} 0$ d) $\operatorname{arccotg} \sqrt{3}$.

a) $\operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3}{4}\pi$ b) $\operatorname{arccotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi$ c) $\operatorname{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$ d) $\operatorname{arccotg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$

Př. 15: Urči pomocí kalkulačky přibližně ve stupňové míře:
a) $\operatorname{arcotg} 0{,}1$ b) $\operatorname{arcotg} 5$ c) $\operatorname{arcotg} -2$.

a) $\operatorname{arccotg} 0{,}1 \doteq 84°17'$ ($\operatorname{cotg} x = 0{,}1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = (0{,}1)^{-1} = 10$, $\operatorname{arctg} 10 \doteq 84°17'$)

b) $\operatorname{arccotg} 5 \doteq 11°19'$ ($\operatorname{cotg} x = 5 \Rightarrow \operatorname{tg} x = (5)^{-1} = 0{,}2$, $\operatorname{arctg} 0{,}2 \doteq 11°19'$)

c) $\operatorname{arccotg}(-2) \doteq 153°26'$ ($\operatorname{cotg} x = -2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = (-2)^{-1} = -0{,}5$, $\operatorname{arctg}(-0{,}5) \doteq 26°34'$, funkce $y = \operatorname{arccotg} x$ má hodnoty pouze v intervalu $(0;\pi)$ $\Rightarrow$ k hodnotě $\operatorname{arctg}(-0{,}5) \doteq -26°34'$ přičtem $180°$ $\Rightarrow$ $\operatorname{arccotg}(-2) \doteq 153°26'$)

Př. 16: Najdi všechna *x*, pro která platí $\operatorname{cotg} x = -3$.

$\operatorname{cotg} x = -3$ platí pro všechna čísla $\bigcup_{k \in Z} = \{\operatorname{arctg}(-3) + k \cdot \pi\}$.

Př. 17: Petáková:
strana 44/cvičení 43, 44 hodnoty $\arccos$, arctg, arccot