

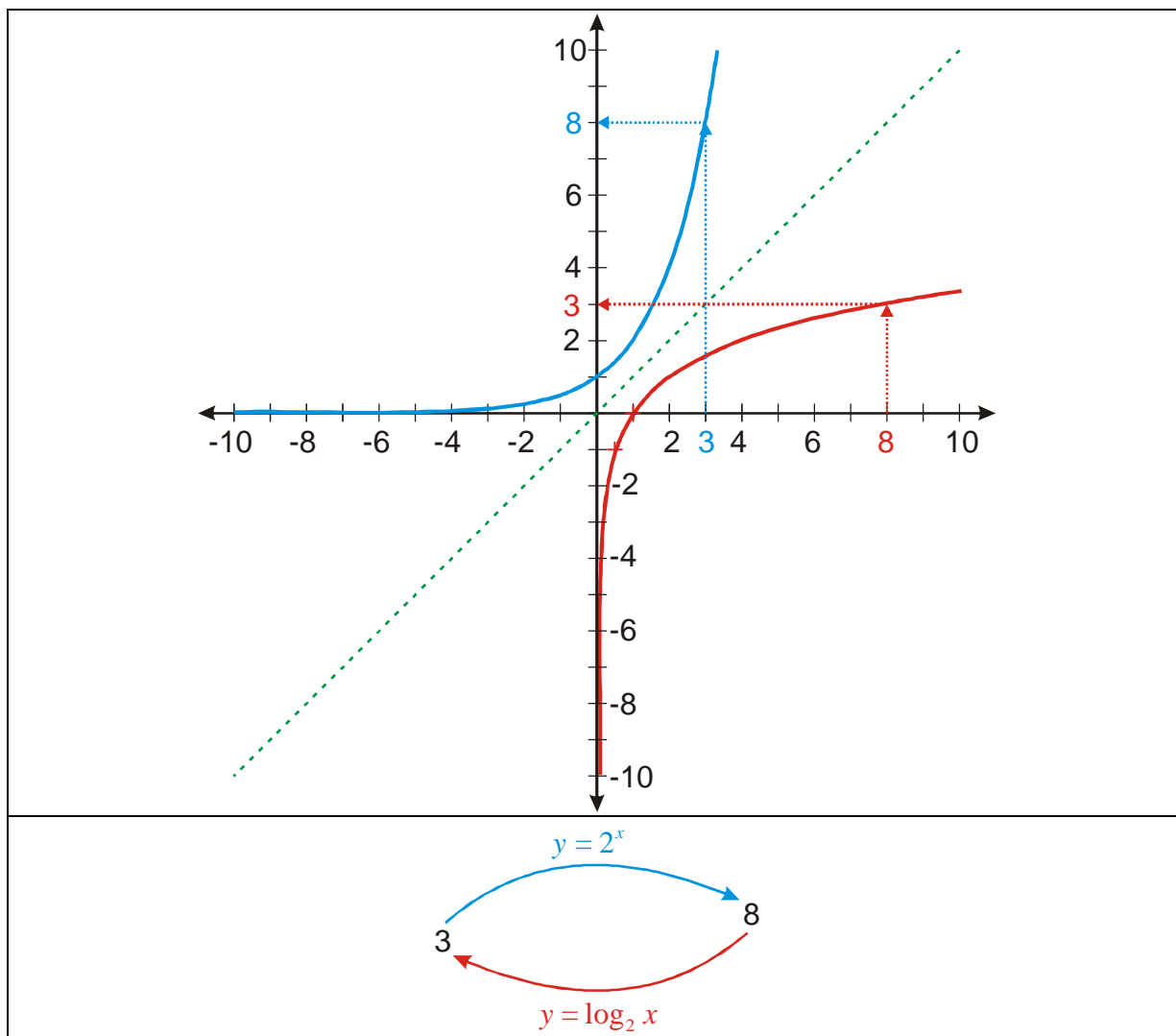
4.2.16 Funkce Arcsin

Předpoklady: 4213

Některé dosud probírané funkce můžeme spojit do dvojic:

Kvadratická funkce	Druhá odmocnina
$y = x^2, x \in \langle 0; \infty \rangle$	$y = \sqrt{x}$
$2 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 2$
$\sqrt{4}$ je číslo, jehož druhá mocnina se rovná 4.	

Exponenciální funkce	Logaritmická funkce
$y = 2^x$	$y = \log_2 x$
$3 \rightarrow 8$	$8 \rightarrow 3$
$\log_2 8$ je číslo, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo 8.	



Dvojici tvoří dvě navzájem inverzní funkce, které mají obrácené dvojice
 [proměnná; hodnota].

- Druhá odmocnina je inverzní funkcí k druhé mocnině a používáme ji, když potřebujeme zjistit, jaké číslo dát na druhou, aby vyšla požadovaná hodnota druhé mocniny.
- Logaritmus je inverzní funkcí k exponenciální funkci a používáme ho, když potřebujeme zjistit, na jaké číslo umocnit základ, aby vyšla požadovaná hodnota.

Goniometrické funkce vyrábějí z hodnoty úhlu souřadnici bodu na jednotkové kružnici. Odpovídají na otázku: „**Jaký bude poměr stran, když úhel bude 60° ?**“.

Je možné položit i obrácenou otázku: „**Jaký musí být úhel, aby poměr stran byl 0,4?**“
 Podobná obrácená otázka stála u zavedení odmocnin a logaritmů (inverzních funkcí) \Rightarrow
potřebujeme najít inverzní funkce k funkcím goniometrickým.

Tyto funkce ve skutečnosti již dávno používáme. Na kalkulačkách jsou označeny většinou \sin^{-1} , \cos^{-1} případně \tan^{-1} a používali jsme je vždy, když jsme potřebovali zjistit velikost

úhlu při známé hodnotě některé z goniometrických funkcí (hledali jsme odpověď na obrácenou otázku).

Hodnoty inverzních funkcí k funkcím goniometrickým jsme již určovali v jedné předchozích hodin, kdy jsme hledali úhly k zadaným hodnotám goniometrických funkcí.

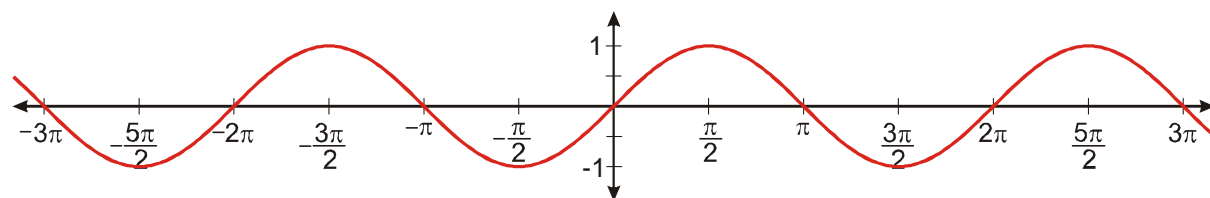
Nyní je zavedeme pořádně.

Jaké požadavky musí splňovat funkce, ke které chceme najít funkci inverzní?

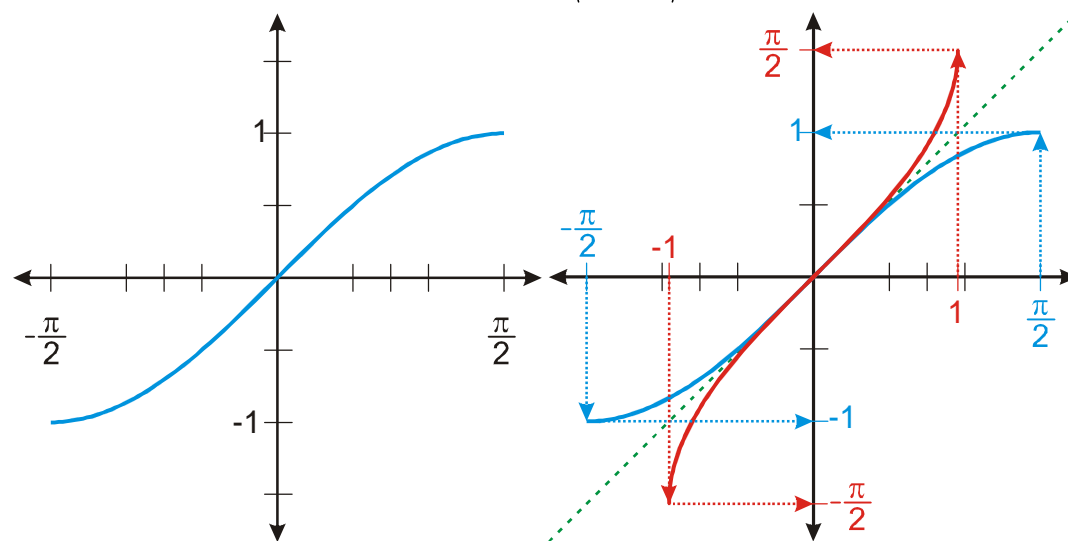
Funkce musí být prostá (aby po obrácení šipek z každého čísla vycházela pouze jedna).

⇒ **Problém:** goniometrické funkce nejsou prosté, protože jsou periodické ⇒ budeme muset omezit definiční obor (stejně jako u kvadratické funkce).

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = \sin x$. Omez její definiční obor tak, aby bylo možné nalézt inverzní funkci. Nakresli do nového obrázku graf funkce $y = \sin x$ s omezeným definičním oborem a graf funkce k ní inverzní.



Omezíme definiční obor pouze na $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.



Funkce inverzní k funkci $y = \sin x$ se nazývá $y = \arcsin x$ (arkus sinus).

Př. 2: Srovnej v tabulce vlastnosti funkcí $y = \sin x$ (s omezeným definičním oborem) a $y = \arcsin x$.

$y = \sin x$	$y = \arcsin x$
$D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$	$D(f) = \langle -1; 1 \rangle$

$H(f) = \langle -1; 1 \rangle$	$H(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$
funkce je rostoucí	funkce je rostoucí

- Př. 3:** Urči: a) $\arcsin 1$ b) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ c) $\arcsin 0$
d) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ f) $\arcsin(-1)$
g) $\arcsin 2$.

- a) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ (protože $\sin\frac{\pi}{2} = 1$)
b) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ (protože $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)
c) $\arcsin 0 = 0$ (protože $\sin 0 = 0$)
d) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ (protože $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$)
e) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ (protože $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$)
f) $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ (protože $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$)
g) $\arcsin 2 = \text{neexistuje}$ (protože funkce $y = \sin x$ nemá nikdy hodnotu 2)

Př. 4: Urči pomocí kalkulačky ve stupních s přesností na minuty přibližné hodnoty:

- a) $\arcsin 0,2$ b) $\arcsin(-0,7)$ c) $\arcsin\frac{2}{3}$
d) $\arcsin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e) $\arcsin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
- a) $\arcsin 0,2 \doteq 11^{\circ}13'$ b) $\arcsin(-0,7) \doteq -44^{\circ}25'$
c) $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \doteq 41^{\circ}48'$
d) $\arcsin\frac{\pi}{2} = \text{neexistuje}$ (protože funkce $y = \sin x$ nemá nikdy hodnotu větší než 1 a $\frac{\pi}{2} \doteq 1,57$)
e) $\arcsin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \doteq -51^{\circ}45'$ $\left(-\frac{\pi}{4} \doteq -0,79\right)$

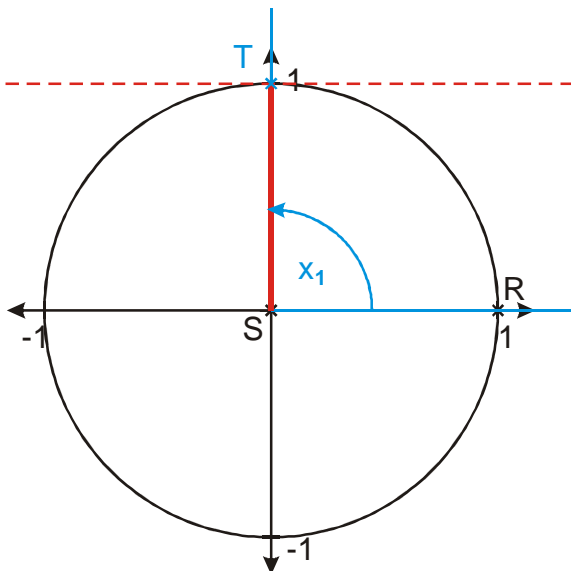
U kvadratické funkce a druhé odmocniny:

- $\sqrt{4} = 2$ - druhá odmocnina ze čtyř má pouze jednu hodnotu (aby byla určena jednoznačně).
- $x^2 = 4$
 $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ - čísla, která po umocnění na druhou dají 4, jsou dvě, hodnota $\sqrt{4} = 2$ a číslo k ní opačné $-\sqrt{4} = -2$.

\Rightarrow U neprostých původních funkcí není výpočet inverzní funkce to samé jako nalezení všech hodnot, které dají v původní funkci požadovaný výsledek. Tedy $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, ale čísel pro které platí $\sin x = 1$ je více (nekonečně mnoho).

Př. 5: Najdi všechna x , pro která platí $\sin x = 1$.

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, tím jsme našli pouze čísla z intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Nakreslíme jednotkovou kružnici:



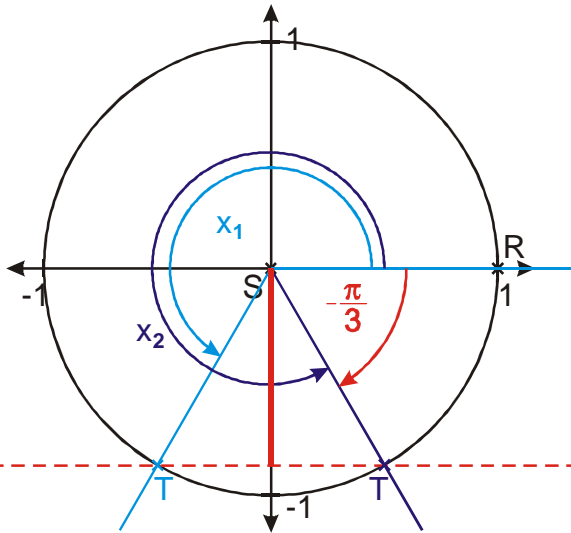
V intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ žádné další takové x není.

Protože funkce $y = \sin x$ je periodická s nejmenší periodou 2π , platí $\sin x = 1$ i pro všechny další velikosti úhlu $\frac{\pi}{2}$ (čísla vzdálená o násobky 2π).

$\sin x = 1$ platí pro všechna čísla $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\}$.

Př. 6: Najdi všechna x , pro která platí $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, tím jsme našli pouze čísla z intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Nakreslíme jednotkovou kružnici:



Z obrázku je vidět, že v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ existují dvě hodnoty x , pro které platí $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$x_1 = \frac{4}{3}\pi \text{ a } x_2 = \frac{5}{3}\pi \text{ (základní velikost úhlu } -\frac{\pi}{3}\text{)}.$$

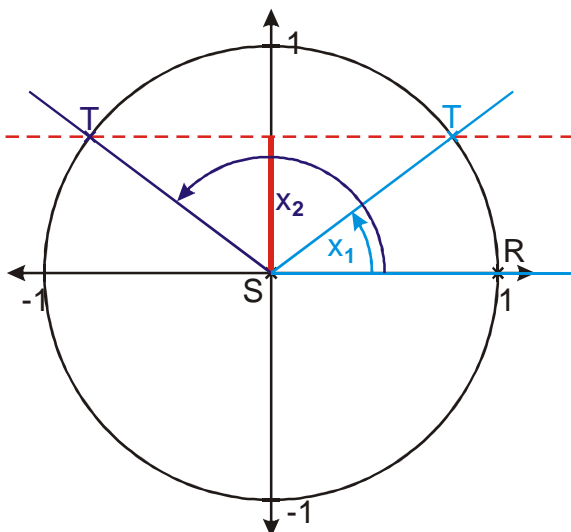
Protože funkce $y = \sin x$ je periodická s nejmenší periodou 2π , platí $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i pro všechny další velikosti obou úhlů.

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ platí pro všechna čísla } \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}.$$

Př. 7: Najdi všechna x , pro která platí $\sin x = 0,6$. Výsledek uveď v desetinné míře s přesností na minuty.

Protože 0,6 nepatří mezi tabulkové hodnoty funkce $y = \sin x$, nemůžeme přesně určit hodnotu úhlu x (stejně jako nedokážeme zapsat přesně hodnotu čísla, které se po umocnění na druhou rovná 2).

Přibližná hodnota stanovená pomocí kalkulačky je rovna $\arcsin 0,6 \doteq 38^\circ 52'$ (podobně přibližná hodnota $\sqrt{2} \doteq 1,414$).



Z obrázku je vidět, že v intervalu $\langle 0; 360^\circ \rangle$ existují dvě hodnoty x , pro které platí $\sin x = 0,6$: $x_1 = 38^\circ 52'$ a $x_2 = 180^\circ - 38^\circ 52' = 141^\circ 8'$.

Protože funkce $y = \sin x$ je periodická s nejmenší periodou 360° , platí $\sin x = 0,6$ pro všechna čísla $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} = \{38^\circ 52' + k \cdot 360^\circ; 141^\circ 8' + k \cdot 360^\circ\}$.

Přesně musíme zapisovat úhel, pro který platí $\sin x = 0,6$ pomocí funkce arcsin jako $\arcsin 0,6$ (stejně jako používáme pro přesné vyjádření čísla, které se po umocnění rovná 2 symbol $\sqrt{2}$).

Platí tedy $x_1 = \arcsin 0,6$. Z obrázku jednotkové kružnice je vidět, že v intervalu $\langle 0; 360^\circ \rangle$ existují dvě hodnoty x , pro které platí $\sin x = 0,6$: $x_1 = \arcsin 0,6$ a $x_2 = 180^\circ - \arcsin 0,6$. $\sin x = 0,6$ platí pro všechna čísla $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} = \{\arcsin 0,6 + k \cdot 360^\circ; 180^\circ - \arcsin 0,6 + k \cdot 360^\circ\}$.

Dodatek: Řešení předchozího příkladu můžeme zapsat i v obloukové míře. Z obrázku jednotkové kružnice je vidět, že v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ existují dvě hodnoty x , pro které platí $\sin x = 0,6$: $x_1 = \arcsin 0,6$ a $x_2 = \pi - \arcsin 0,6$.

$\sin x = 0,6$ platí pro všechna čísla $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} = \{\arcsin 0,6 + k \cdot 2\pi; \pi - \arcsin 0,6 + k \cdot 2\pi\}$.

Př. 8: Najdi všechna $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, pro která platí $\sin x = -0,4$.

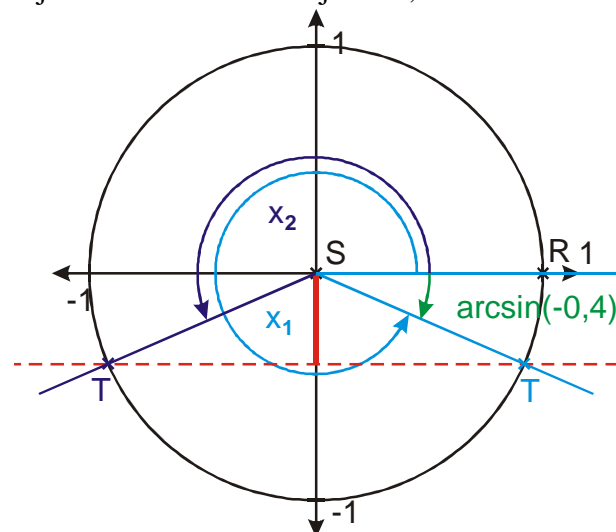
Protože $-0,4$ nepatří mezi tabulkové hodnoty funkce $y = \sin x$, nemůžeme přesně určit hodnotu úhlu x .

Přibližná hodnota stanovená pomocí kalkulačky je rovna $\arcsin(-0,4) \doteq -23^\circ 35'$.

Přesně zapisujeme požadovaný úhel, pro který platí $\sin x = -0,4$ pomocí funkce arcsin jako $\arcsin(-0,4)$.

Bohužel $\arcsin(-0,4)$ je záporné číslo a nepatří mezi čísla, která hledáme.

Z jednotkové kružnice zjistíme, zda taková čísla existují:



Z obrázku je vidět, že v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ existují dvě hodnoty x , pro které platí $\sin x = -0,4$.

Můžeme je vyjádřit pomocí úhlu $\arcsin(-0,4)$ (tento úhel je záporný) :

$$x_1 = \arcsin(-0,4) + 2\pi \text{ a } x_2 = \pi - \arcsin(-0,4).$$

Dodatek: Funkce $y = \arcsin x$ je lichá. Hodnoty můžeme vyjadřovat i pomocí kladného úhlu $\arcsin(0,4) = -\arcsin(-0,4)$: $x_1 = 2\pi - \arcsin(0,4)$ a $x_2 = \pi + \arcsin(0,4)$.

Př. 9: Petáková:
strana 44/cvičení 43, 44 hodnoty \arcsin

Shrnutí: Inverzní funkcí k funkci $\sin x$ je funkce $\arcsin x$.