4.2.14 Funkce tangens

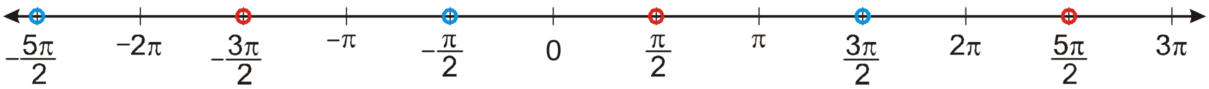
Funkcí tangens se nazývá funkce daná vztahem $y = \frac{\sin x}{\cos x}$. **Tuto funkci značíme** $\text{tg}\, x$.

Př. 1: Urči definiční obor funkce $y = \text{tg}\, x$.

Pokud zohledníme, že funkce $y = \cos x$ je periodická s nejmenší periodou 2π. Jde o dvě množiny čísel: $\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\}$ $\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$

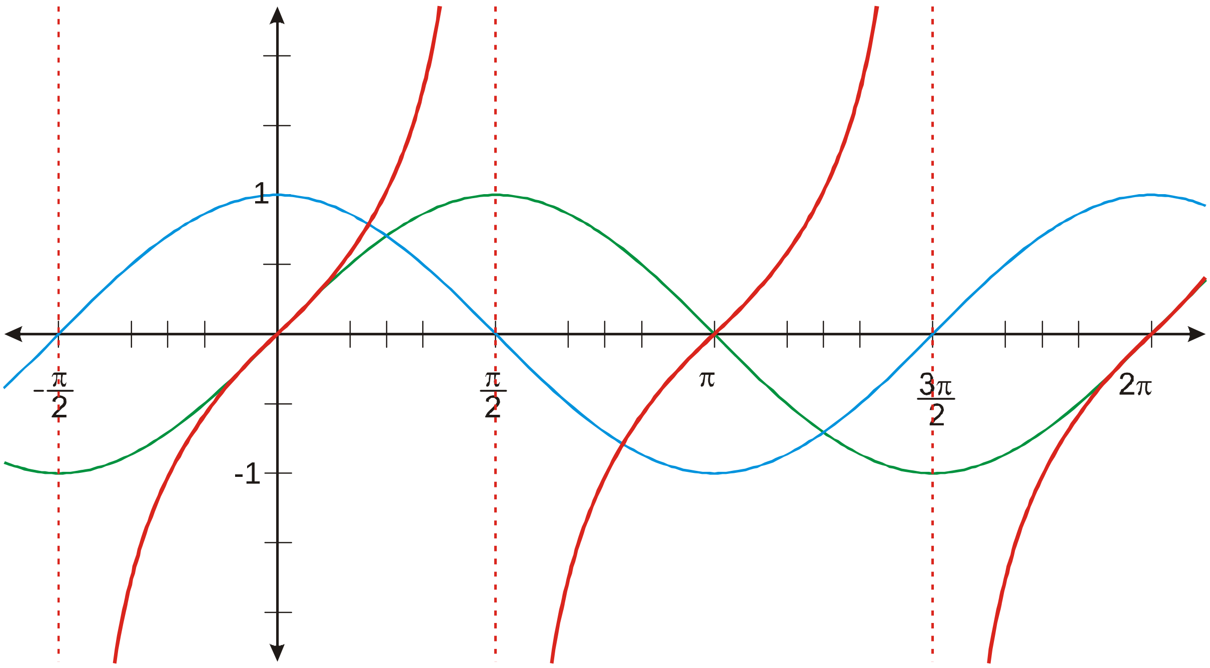
Obě předchozí množiny je možné zapsat úsporněji pomocí jedné množiny. Nakreslíme si osu a vyznačíme si, která čísla jsme vyřadili z definičního oboru.

$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\}$ $\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$



$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\} + \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \right\} = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

Př. 2: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$. Pomoci nakreslených grafu odhadni tvar grafu funkce $y = \text{tg}\, x$.



Př. 3: V tabulce hodnot goniometrických funkcí doplň hodnoty pro tangens.

Př. 4: Zakresli hodnoty spočtené v tabulce do odhadnutého grafu funkce $y = \text{tg}\, x$ a ověř tak správnost odhadu.

Př. 5: Z grafu funkce $y = \text{tg}\, x$ urči její vlastnosti.

$D(f) = R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ Periodická s nejmenší periodou π. $H(f) = R$

Není omezená $\Rightarrow$ nemá maximum ani minimum. Lichá.

Rostoucí v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, dále pak v intervalu $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right)$, …, tedy ve všech intervalech $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$. Kladné hodnoty v intervalech $\left(0+k\cdot\pi;\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\right)$.

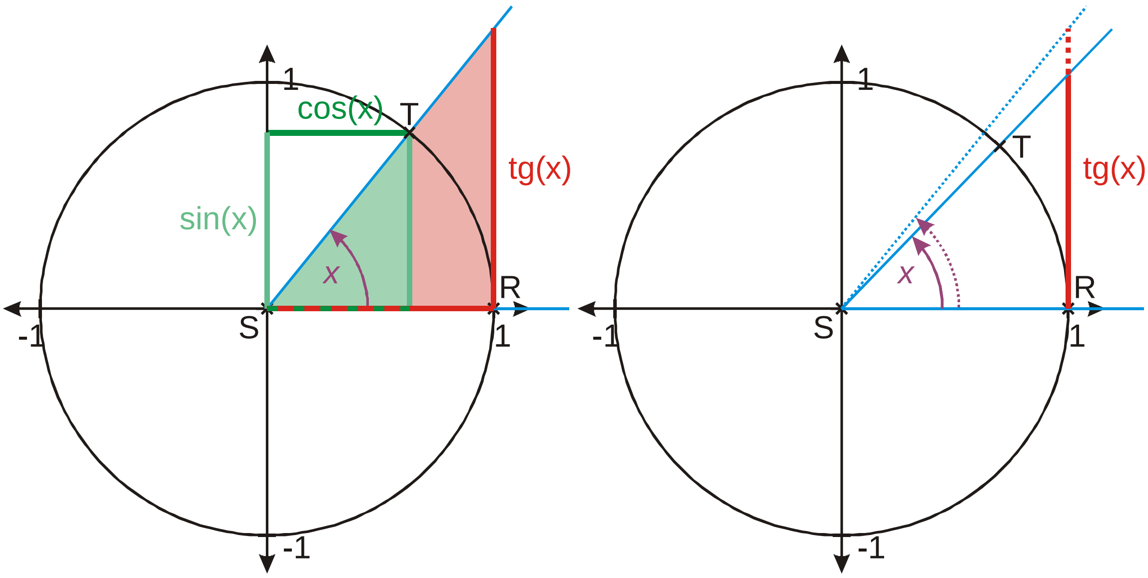
Záporné hodnoty v intervalech $\left(\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi;\pi+k\cdot\pi\right)$.

Př. 6: Dokaž pomocí definice funkce $y=\operatorname{tg}x$, že je funkce lichá.

$$\operatorname{tg}(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}=-\operatorname{tg}(x) \Rightarrow \text{ dokázáno.}$$

Definice: $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$. Upravíme definici tak, abychom mohli použít poměr stran u podobných trojúhelníků: $\frac{\operatorname{tg}x}{1}=\frac{\sin x}{\cos x}$.

Zelený trojúhelník už známe, červený trojúhelník musí být podobný zelenému a jeho kratší (vodorovná) odvěsna musí mít délku 1 $\Rightarrow$ trojúhelník zkonstruujeme, když v bodě R sestrojíme svislou přímku a necháme ji protnout s koncovým ramenem úhlu x. Svislá odvěsna má délku $\operatorname{tg}x$.



Př. 7: Pomocí znázornění funkce $y=\operatorname{tg}x$ na jednotkové kružnici zdůvodni, proč je v intervalu $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ funkce $y=\operatorname{tg}x$ rostoucí.

Př. 8: Petáková:
strana 42/cvičení 27 f_2, f_3, f_5, f_7