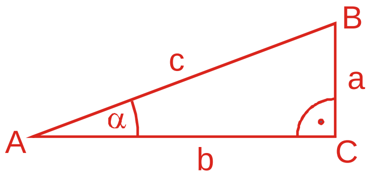
4.2.14 Funkce tangens

Předpoklady: 4210



Tangens a cotangens jsou definovány v pravoúhlém trojúhelníku:

- $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\textit{protilehlá}}{\textit{přilehlá}}$
- $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\textit{přilehlá}}{\textit{protilehlá}}$

Pokud chceme definici pro všechna $x \in R$, nemůžeme použít definici založenou na stranách pravoúhlého trojúhelníku (podobně jako u funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$).

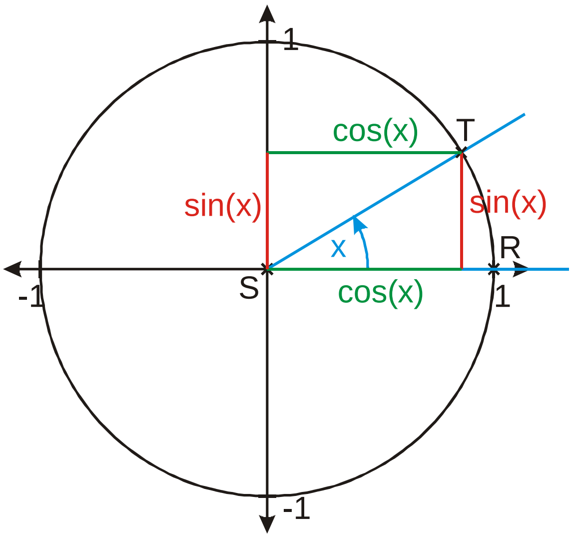
Máme definovány funkce $\sin x$ a $\cos x$ pro všechna $x \in R$ a vzorec $\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\Rightarrow$ použijeme jej jako definiční vztah:

Funkcí tangens se nazývá funkce daná vztahem $y = \frac{\sin x}{\cos x}$. Tuto funkci značíme $\mathrm{tg}\,x$.

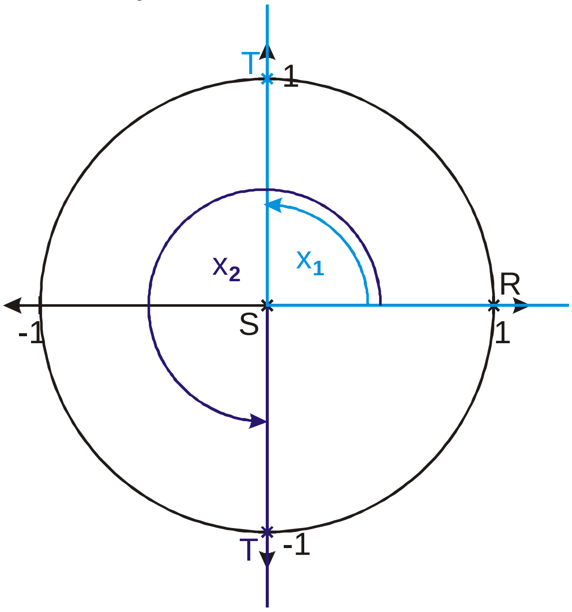
Poznámka: Většina světa používá pro funkci tangens označení $\tan x$.

Př. 1: Urči definiční obor funkce $y = \mathrm{tg}\,x$.

Vyjdeme z definičního vztahu $\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Ve vztahu se dělí $\Rightarrow$ nesmíme dělit nulou, další problémové operace se v ní nevyskytují, obě funkce $\sin x$ i $\cos x$ jsou definovány pro všechna $x \in R$.
Kdy je $\cos x = 0$?
Hodnota funkce $y = \cos x$ je dána jako *x*-ová souřadnice bodu na jednotkové kružnici.



Z obrázku je vidět, bod T bude mít nulovou x-vou souřadnici, pokud bude ležet na ose y.

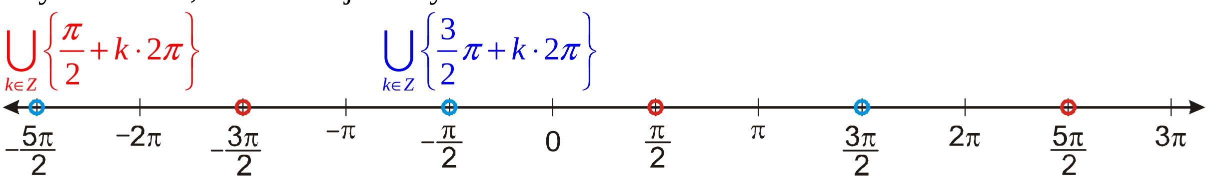


V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ jde o čísla $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ a $x_2 = \dfrac{3}{2}\pi$.

Pokud zohledníme, že funkce $y = \cos x$ je periodická s nejmenší periodou 2π. Jde o dvě množiny čísel: $\bigcup\limits_{k\in Z}\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right\}$ $\quad\bigcup\limits_{k\in Z}\left\{\dfrac{3}{2}\pi + k\cdot 2\pi\right\}$

$\Rightarrow$ Funkce tangens je definována pro všechna čísla $R - \bigcup\limits_{k\in Z}\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right\} - \bigcup\limits_{k\in Z}\left\{\dfrac{3}{2}\pi + k\cdot 2\pi\right\}$.

Obě předchozí množiny je možné zapsat úsporněji pomocí jedné množiny. Nakreslíme si osu a vyznačíme si, která čísla jsme vyřadili z definičního oboru.

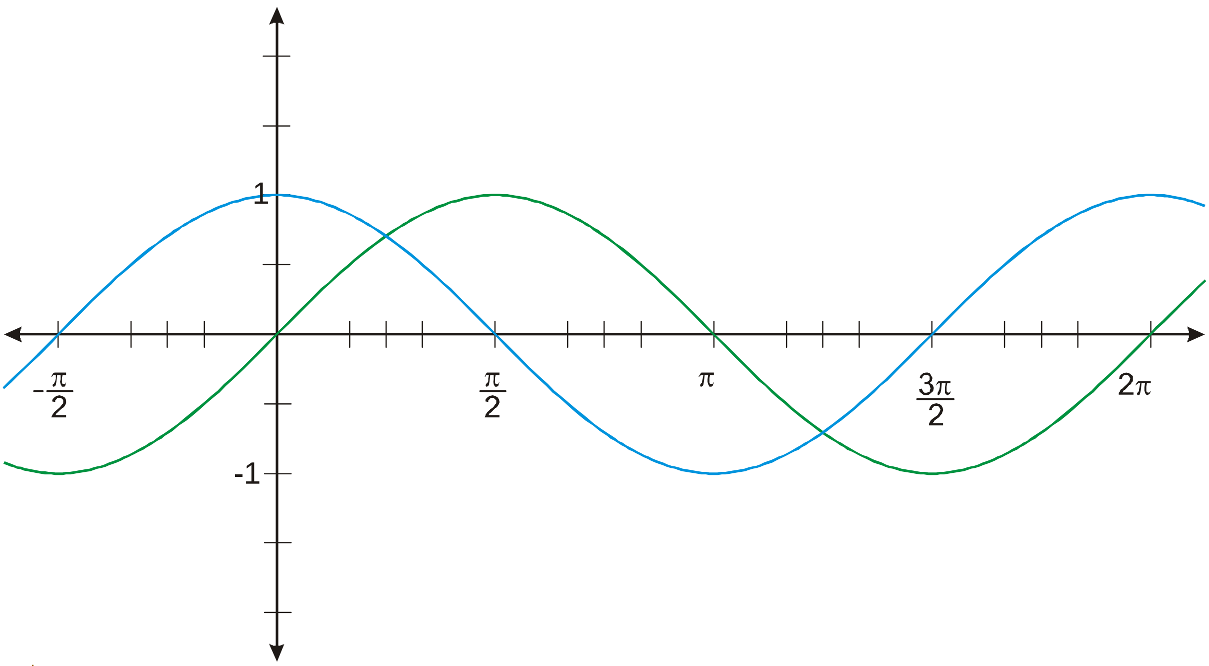


Jednotlivá vyřazená čísla *x* jsou rovnoměrně rozmístěna po ose, jsou od sebe vzdálena o násobky π. Všechna vyřazená čísla bychom získali tak, že bychom se z bodu $\frac{\pi}{2}$ posouvali o násobky π.

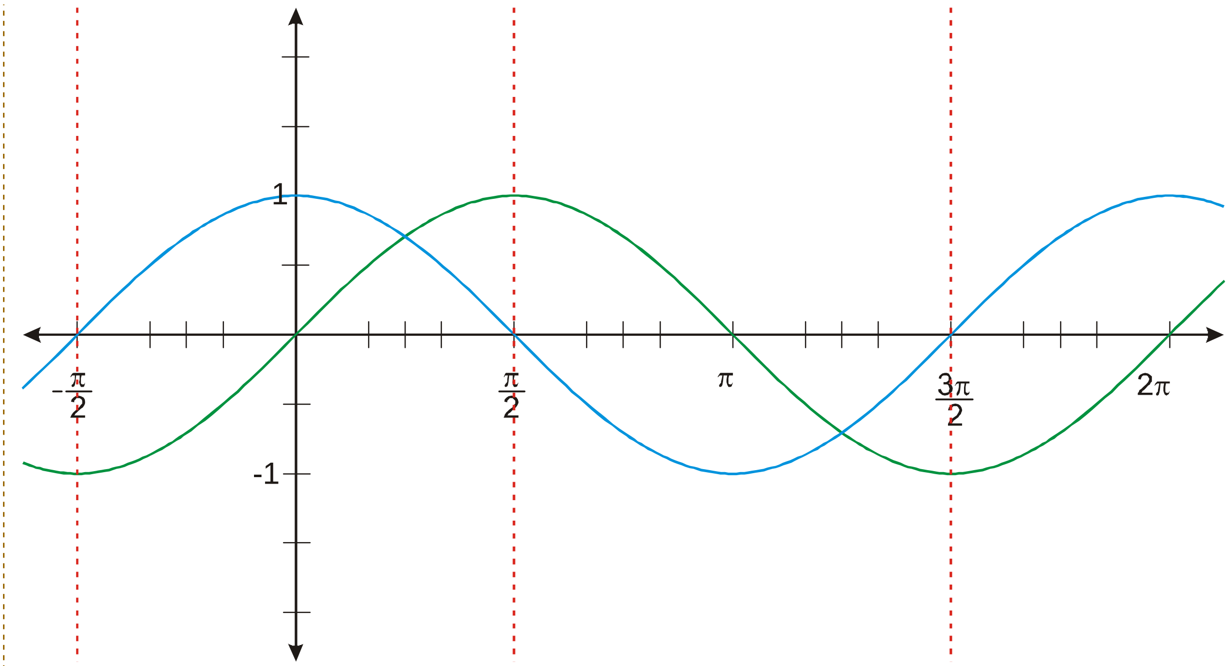
$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right\}+\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{3}{2}\pi+k\cdot 2\pi\right\}=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$$

$\Rightarrow$ Funkce tangens je definována pro všechna čísla $R-\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$.

Př. 2: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y=\sin x$ a $y=\cos x$. Pomoci nakreslených grafu odhadni tvar grafu funkce $y=\operatorname{tg} x$.

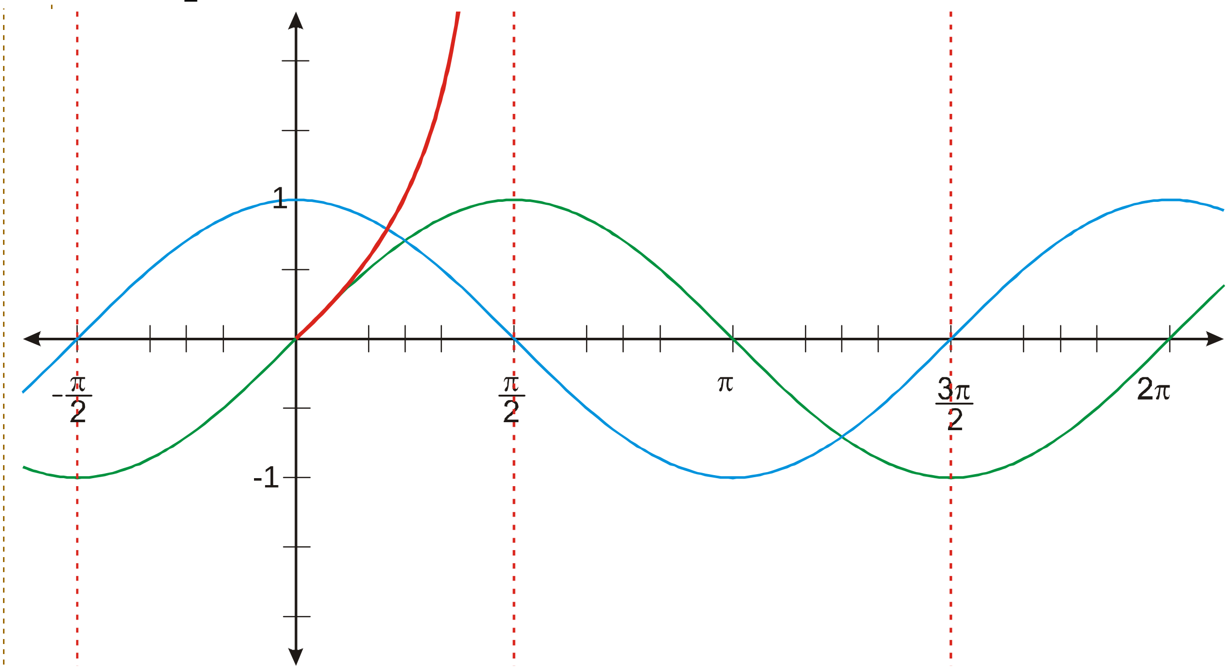


- V bodech, ve kterých graf funkce $y=\cos x$ protíná osu *x*, nebude mít funkce $y=\operatorname{tg} x$ žádnou hodnotu (nulou nelze dělit).

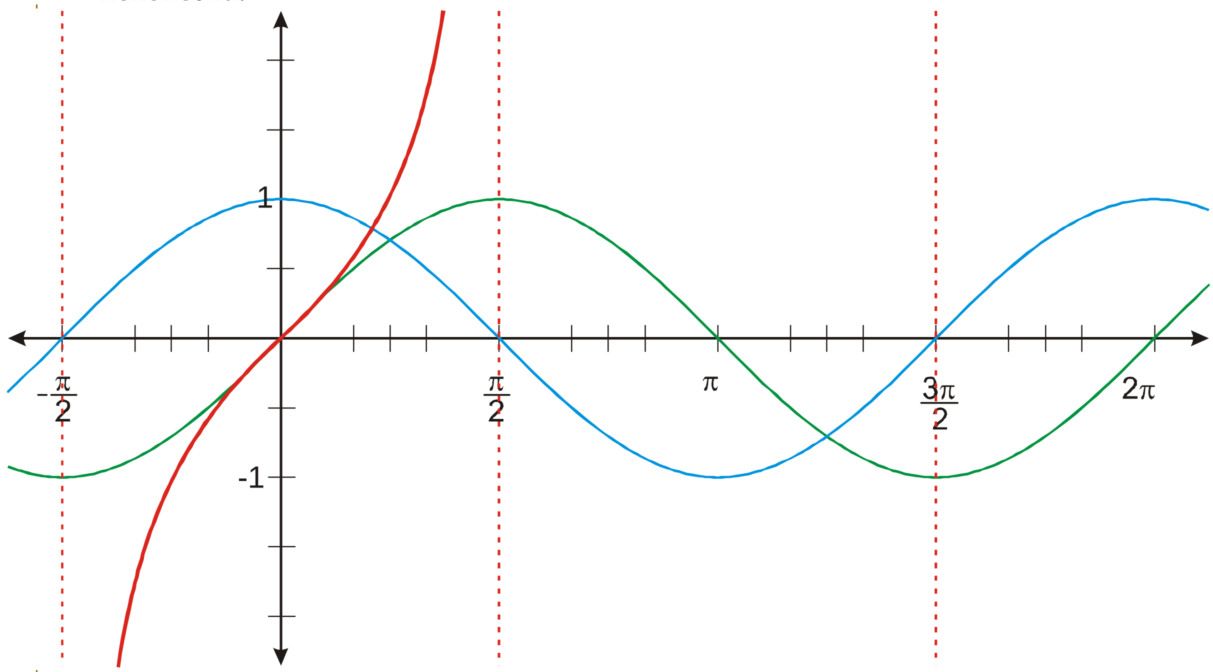


Funkce $y = \operatorname{tg} x$ je definována jako podíl dvou funkcí $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\Rightarrow$ zelenou křivku budeme v grafu dělit modrou.

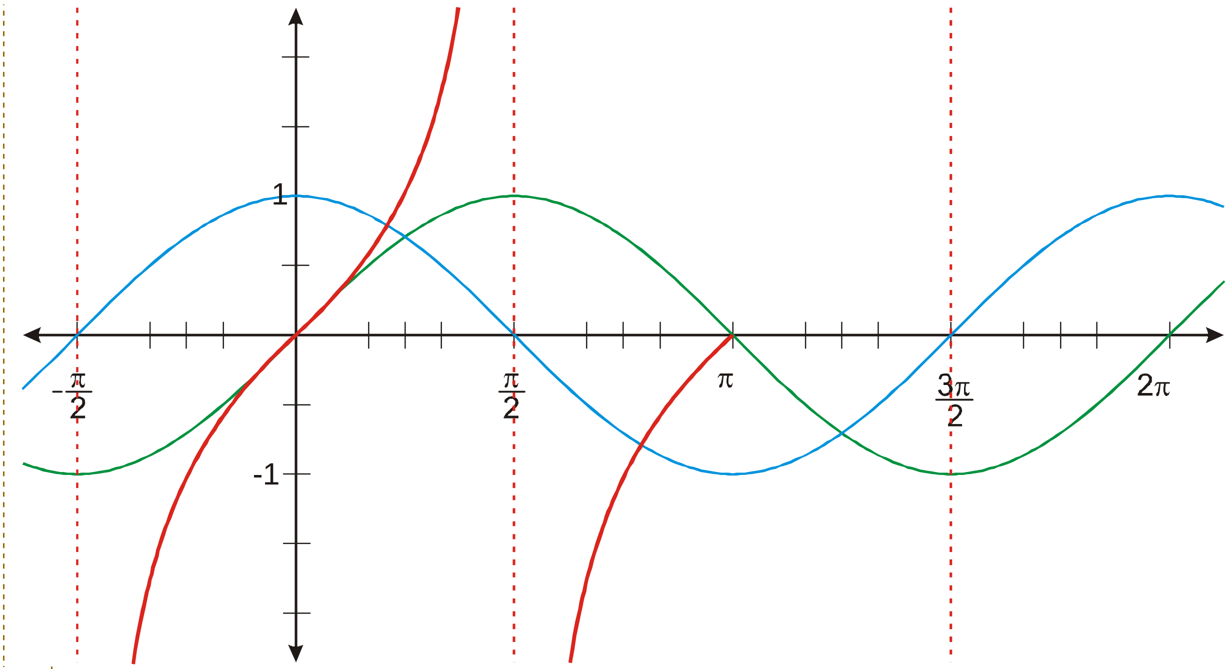
- V bodě $x = 0$ je hodnota funkce $y = \operatorname{tg} x$ rovna $\frac{0}{1} = 0$.
- V intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ dělíme hodnoty $\sin x$, nejdříve čísly blízkými 1, poté čísly, která se zmenšují. Pro *x* blížící se $\frac{\pi}{2}$ budeme dělit velmi malými čísly. Získané hodnoty budou vždy větší než hodnoty $\sin x$, pro větší čísla *x* se budou lišit více. Pro *x* blížící se k $\frac{\pi}{2}$ se budou blížit nekonečnu.



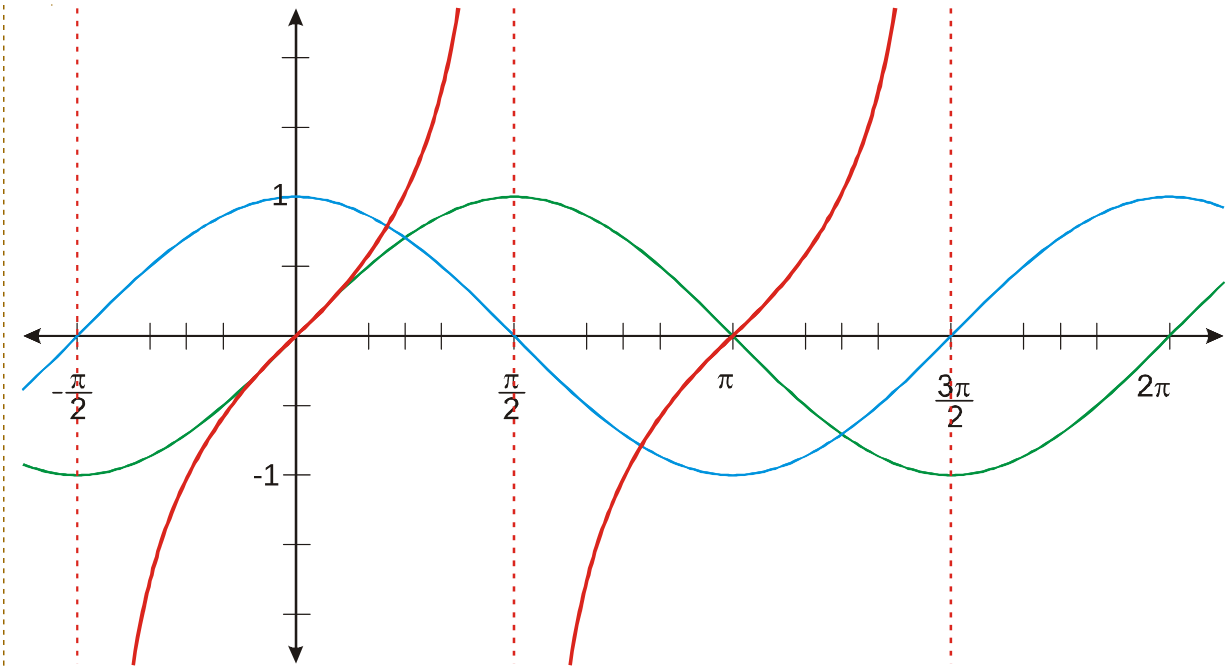
- Zkoumáme interval $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, postupujeme od nuly doleva. Dělíme hodnoty $\sin x$ (záporná čísla), nejdříve čísly blízkými 1, poté čísly, která se zmenšují. Pro *x* blížící se $-\frac{\pi}{2}$ budeme dělit velmi malými čísly. Získané hodnoty budou vždy menší než hodnoty $\sin x$ (jsou to záporná čísla, jejich absolutní hodnota naopak poroste), pro menší čísla *x* se budou lišit více. Pro *x* blížící se k $-\frac{\pi}{2}$ se budou blížit mínus nekonečnu.



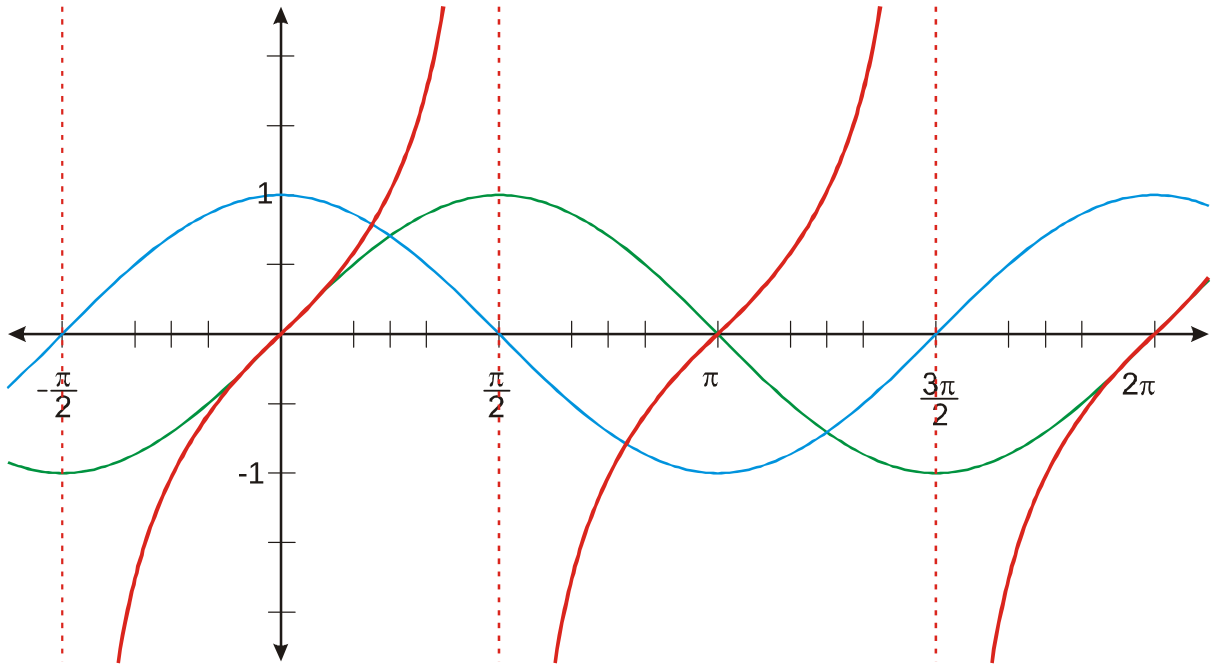
- V intervalu $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ nejdříve dělíme hodnoty $\sin x$ blížící se 1, zápornými čísly které se zmenšují od nuly k –1. Hodnoty podílu se na začátku intervalu blíží k mínus nekonečnu, pak se postupně zvětšují, až se dostanou k nule. Průběh funkce je podobný jako v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.



- V intervalu $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ dělíme dvě záporná čísla, výsledek tedy bude kladný. Hodnoty $\sin x$ se zmenšují od 0 k -1, Hodnota cosinus se zvětšuje od –1 k nule. Hodnota podílu se na začátku intervalu blíží k nule, pak postupně stoupá k nekonečnu. Průběh funkce je podobný jako v intervalu $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.



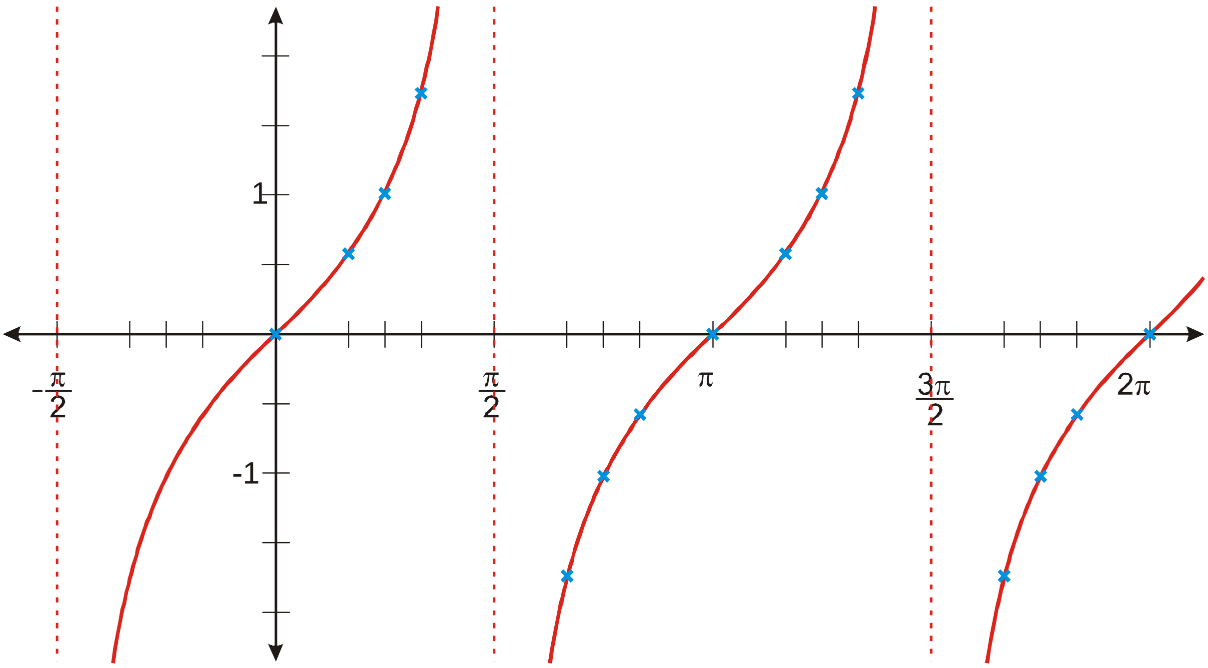
- Hodnoty v dalších intervalech můžeme zkopírovat z již nakreslené části grafu, protože funkce sinus i cosinus jsou periodické s nejmenší periodou 2π a výsledek jejich dělení se také musí opakovat.



Př. 3: V tabulce hodnot goniometrických funkcí doplň hodnoty pro tangens.

Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
Úhel [°]	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{tg}(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Př. 4: Zakresli hodnoty spočtené v tabulce do odhadnutého grafu funkce $y = \text{tg}\, x$ a ověř tak správnost odhadu.



Tabulkové hodnoty potvrzují odhadnutý tvar grafu.

Př. 5: Z grafu funkce $y = \text{tg}\, x$ urči její vlastnosti.

$D(f) = R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ Periodická s nejmenší periodou π.

$H(f) = R$ Není omezená $\Rightarrow$ nemá maximum ani minimum.

Lichá.

Rostoucí v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$, dále pak v intervalu $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right)$, …, tedy ve všech intervalech $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$.

Kladné hodnoty v intervalech $\left(0 + k \cdot \pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right)$.

Záporné hodnoty v intervalech $\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \pi + k \cdot \pi \right)$.

Př. 6: Dokaž pomocí definice funkce $y = \text{tg}\, x$, že je funkce lichá.

Potřebujeme: $\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$.

$$\text{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$$

Použijeme vlastnosti goniometrických funkcí:

- sinus je lichý: $\sin(-x) = -\sin(x)$,

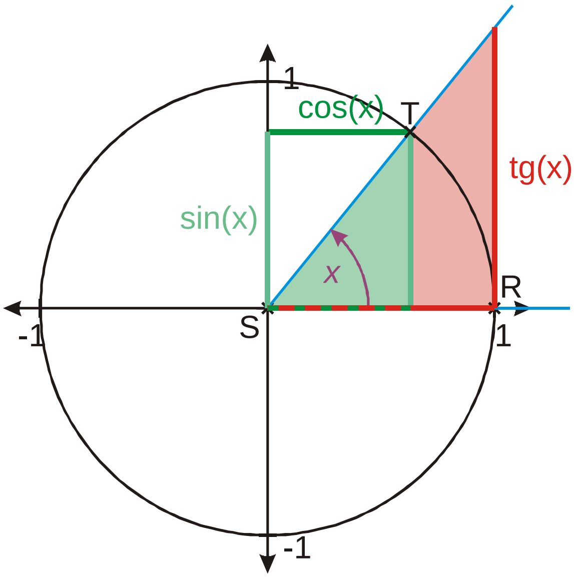
- cosinus je sudý: $\cos(-x) = \cos(x)$.

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\operatorname{tg}(x) \Rightarrow \text{dokázáno.}$$

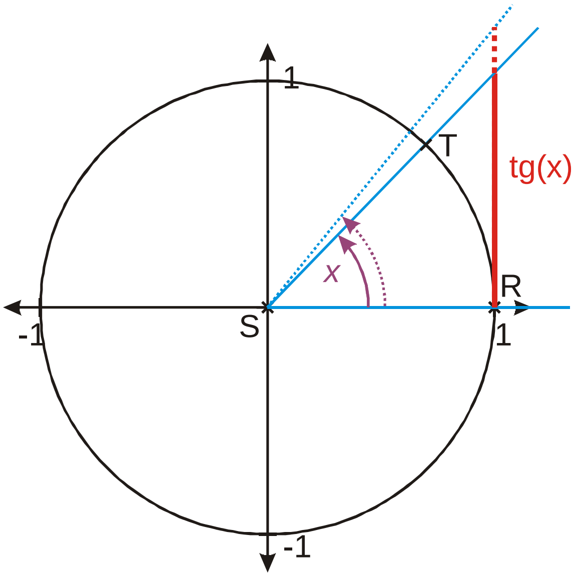
Je možné najít tangens v jednotkové kružnici?

Definice: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Upravíme definici tak, abychom mohli použít poměr stran u podobných trojúhelníků: $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Zelený trojúhelník už známe, červený trojúhelník musí být podobný zelenému a jeho kratší (vodorovná) odvěsna musí mít délku 1 $\Rightarrow$ trojúhelník zkonstruujeme, když v bodě *R* sestrojíme svislou přímku a necháme ji protnout s koncovým ramenem úhlu *x*. Svislá odvěsna má délku $\operatorname{tg} x$.

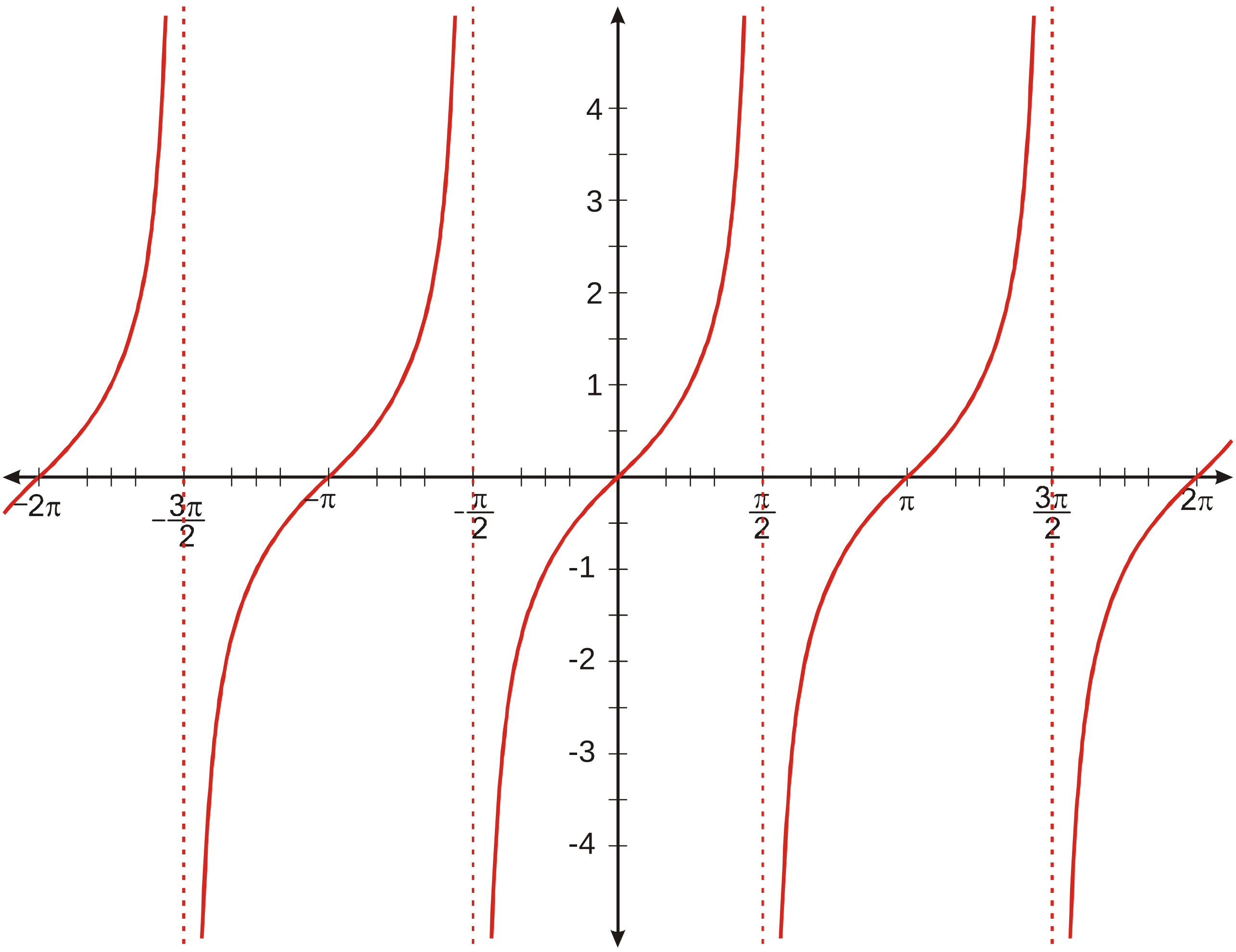


Př. 7: Pomocí znázornění funkce $y = \operatorname{tg} x$ na jednotkové kružnici zdůvodni, proč je v intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ funkce $y = \operatorname{tg} x$ rostoucí.

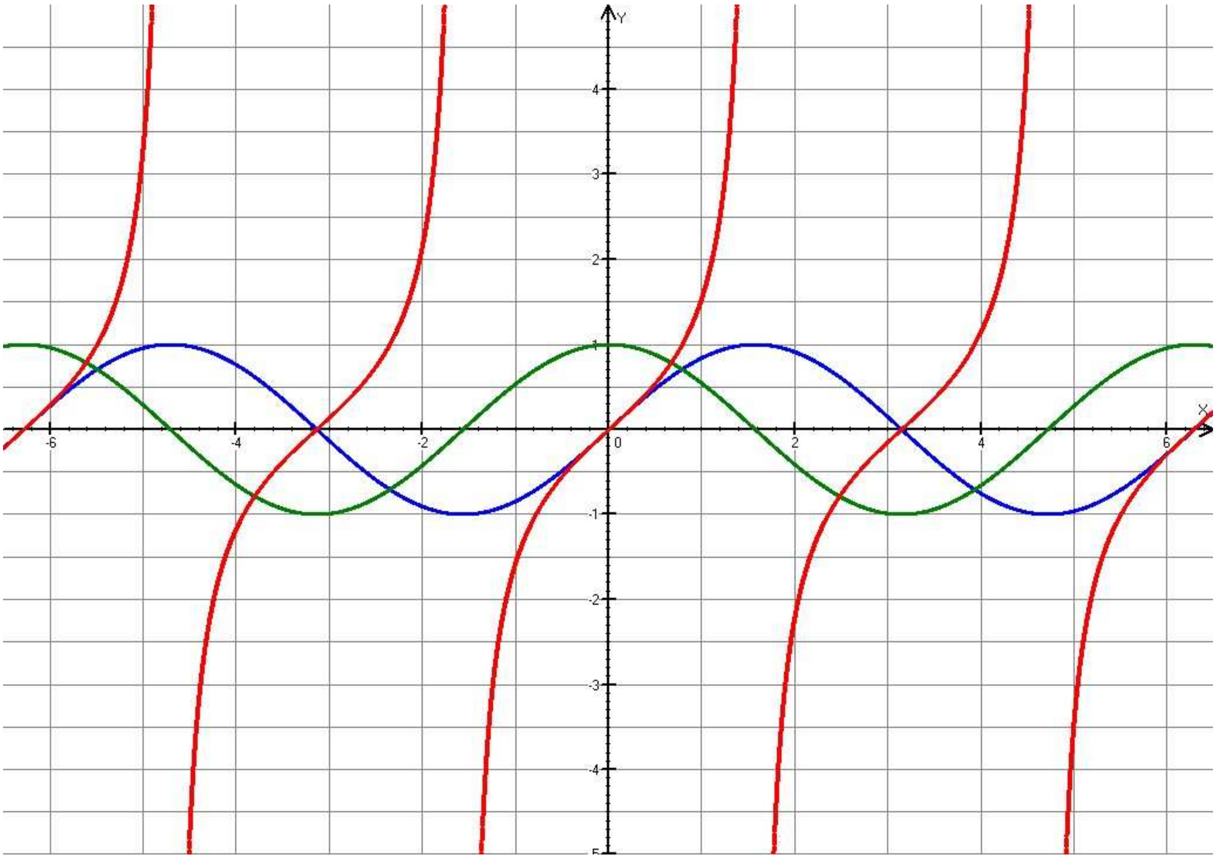


Z obrázku je zřejmé, že při zvětšování úhlu x se zvětšuje hodnota $\operatorname{tg} x$.

V tomto okamžiku můžeme s klidem prohlásit naše grafy za správné. Graf funkce $y = \operatorname{tg} x$ vypadá takto:



Správnost grafu můžeme ověřit i pomocí počítačového programu:
Nakresleny jsou grafy funkcí $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$



Př. 8: Petáková:
strana 42/cvičení 27 f_2, f_3, f_5, f_7

Shrnutí: Funkci tangens definujeme jako podíl $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Je periodická s nejmenší periodou π a definičním oborem $D(f) = R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.