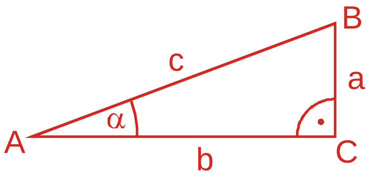
## 4.2.14 Funkce tangens

**Předpoklady:** 4210




Tangens a cotangens jsou definovány v pravoúhlém trojúhelníku:

- $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{protilehlá}{přilehlá}$
- $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{přilehlá}{protilehlá}$

Pokud chceme definici pro všechna $x \in R$, nemůžeme použít definici založenou na stranách pravoúhlého trojúhelníku (podobně jako u funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$).

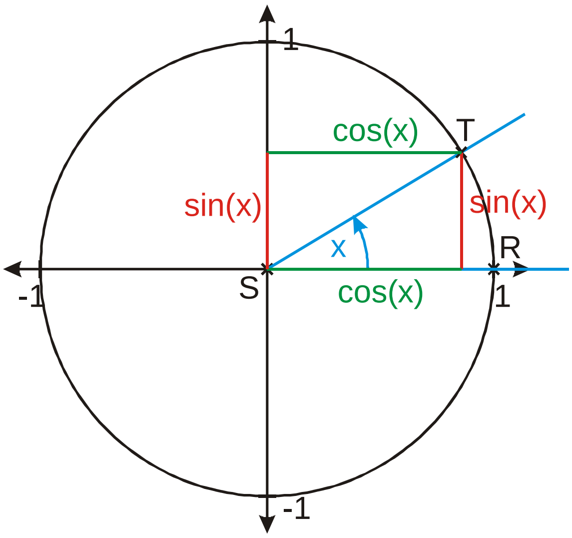
Máme definovány funkce $\sin x$ a $\cos x$ pro všechna $x \in R$ a vzorec $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\Rightarrow$ použijeme jej jako definiční vztah:

**Funkcí tangens se nazývá funkce daná vztahem $y = \frac{\sin x}{\cos x}$. Tuto funkci značíme $\mathrm{tg}\, x$.**

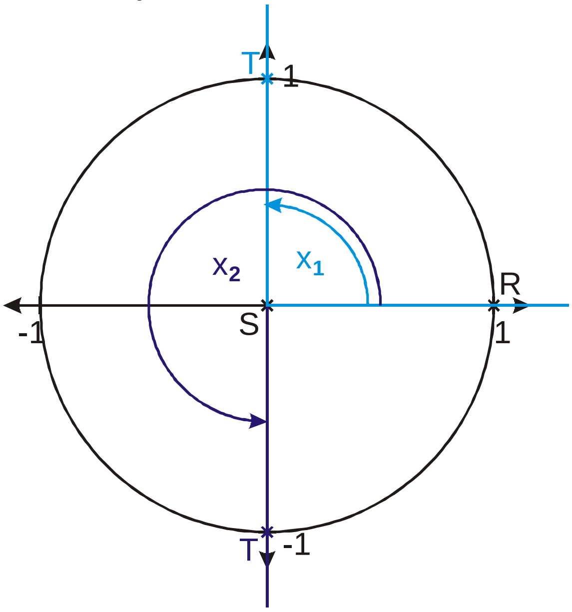
**Poznámka:** Většina světa používá pro funkci tangens označení $\tan x$.

**Př. 1:** Urči definiční obor funkce $y = \mathrm{tg}\, x$.

Vyjdeme z definičního vztahu $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Ve vztahu se dělí $\Rightarrow$ nesmíme dělit nulou, další problémové operace se v ní nevyskytují, obě funkce $\sin x$ i $\cos x$ jsou definovány pro všechna $x \in R$.
Kdy je $\cos x = 0$?
Hodnota funkce $y = \cos x$ je dána jako $x$-ová souřadnice bodu na jednotkové kružnici.




Z obrázku je vidět, bod $T$ bude mít nulovou $x$-vou souřadnici, pokud bude ležet na ose $y$.

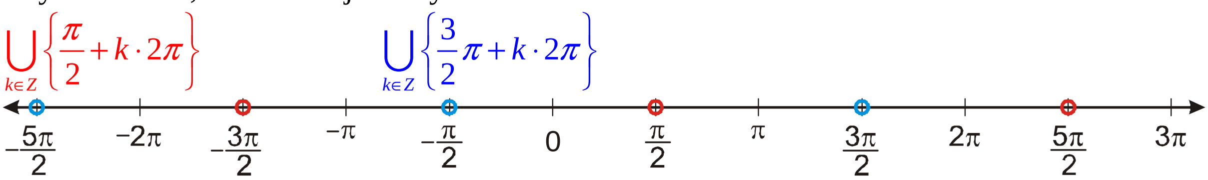



V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ jde o čísla $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ a $x_2 = \dfrac{3}{2}\pi$.

Pokud zohledníme, že funkce $y = \cos x$ je periodická s nejmenší periodou $2\pi$. Jde o dvě množiny čísel: $\bigcup\limits_{k\in Z}\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right\}$ $\qquad \bigcup\limits_{k\in Z}\left\{\dfrac{3}{2}\pi + k\cdot 2\pi\right\}$

$\Rightarrow$ Funkce tangens je definována pro všechna čísla $R - \bigcup\limits_{k\in Z}\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right\} - \bigcup\limits_{k\in Z}\left\{\dfrac{3}{2}\pi + k\cdot 2\pi\right\}$.

Obě předchozí množiny je možné zapsat úsporněji pomocí jedné množiny. Nakreslíme si osu a vyznačíme si, která čísla jsme vyřadili z definičního oboru.

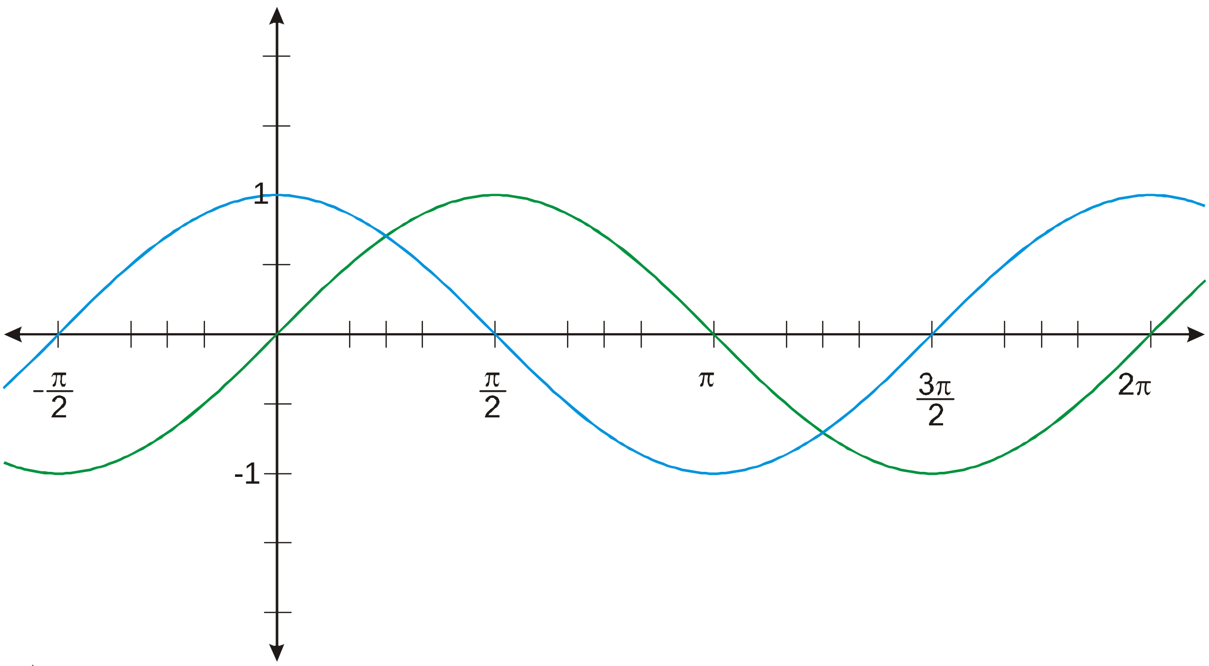


Jednotlivá vyřazená čísla *x* jsou rovnoměrně rozmístěna po ose, jsou od sebe vzdálena o násobky $\pi$. Všechna vyřazená čísla bychom získali tak, že bychom se z bodu $\frac{\pi}{2}$ posouvali o násobky $\pi$.

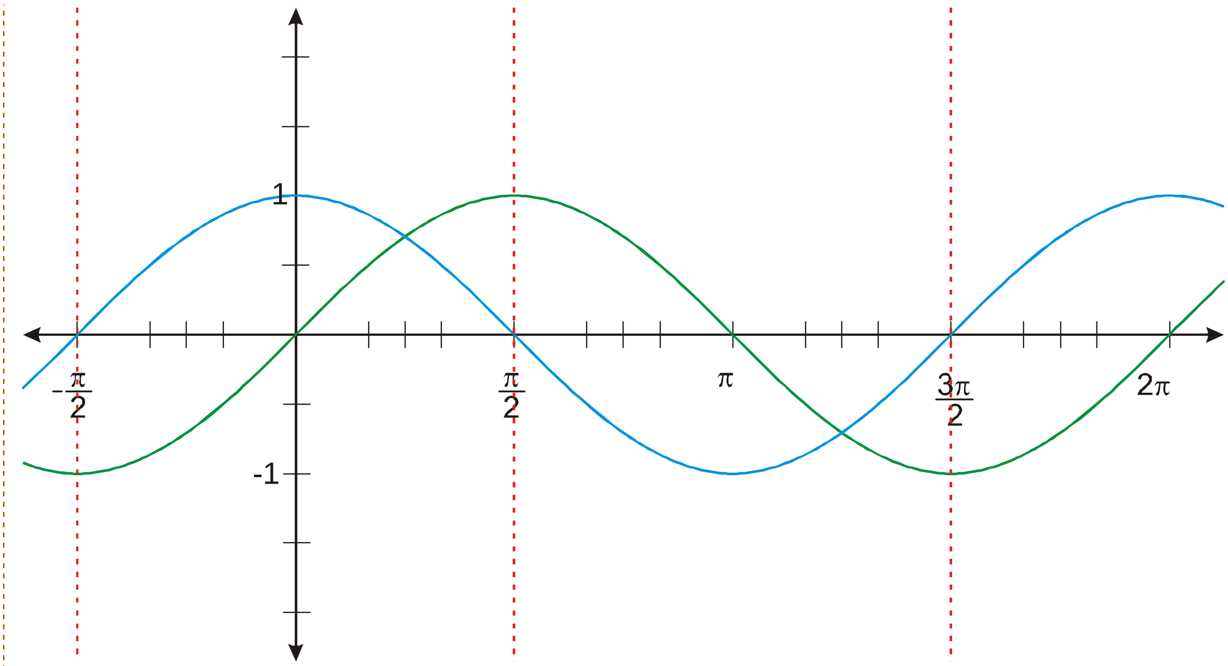
$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right\}+\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{3}{2}\pi+k\cdot 2\pi\right\}=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$$

$\Rightarrow$ Funkce tangens je definována pro všechna čísla $R-\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$.

**Př. 2:** Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y=\sin x$ a $y=\cos x$. Pomoci nakreslených grafu odhadni tvar grafu funkce $y=\operatorname{tg} x$.

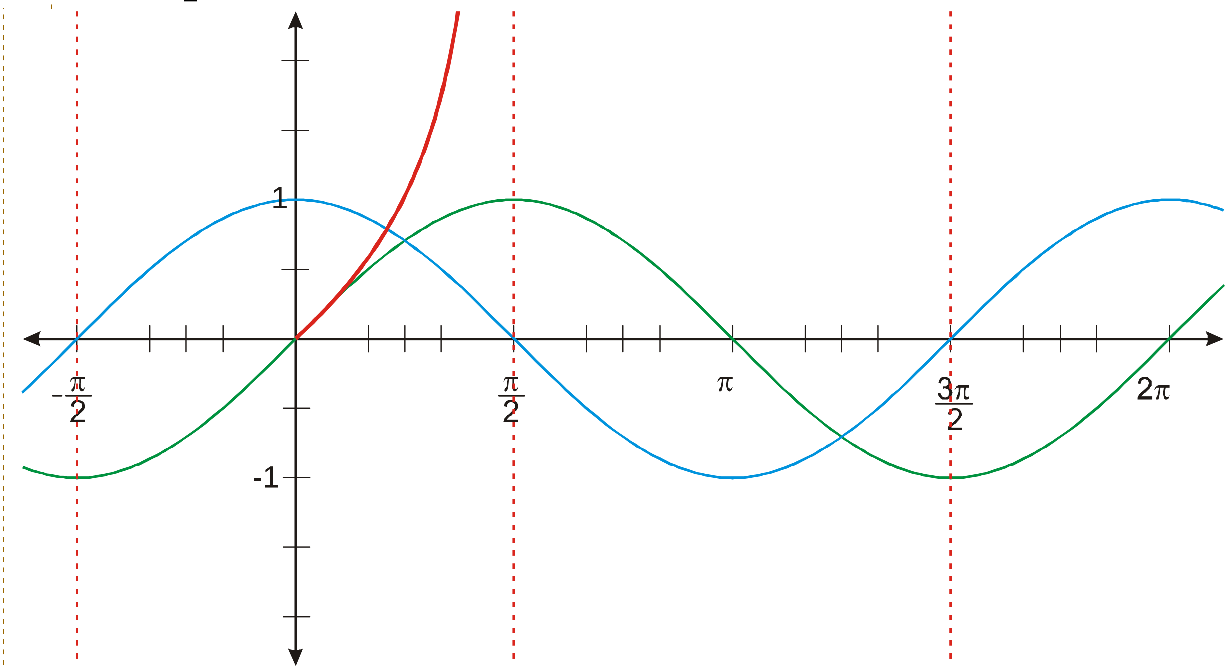



- V bodech, ve kterých graf funkce $y=\cos x$ protíná osu *x*, nebude mít funkce $y=\operatorname{tg} x$ žádnou hodnotu (nulou nelze dělit).

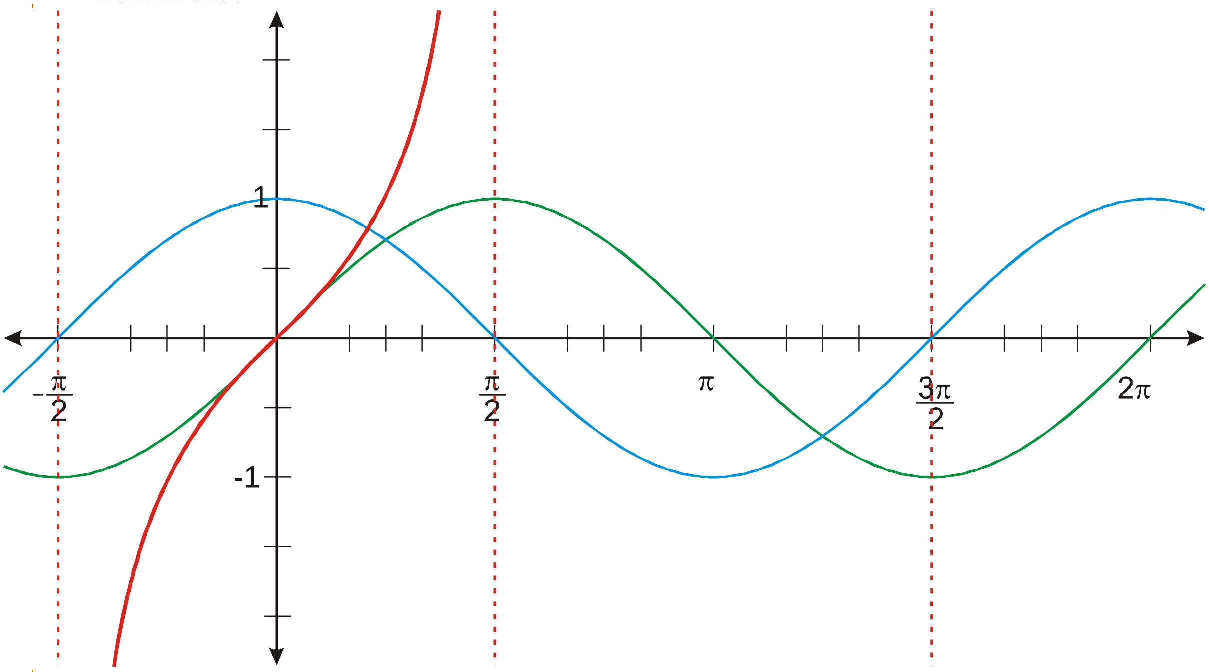



Funkce $y = \mathrm{tg}\, x$ je definována jako podíl dvou funkcí $y = \mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\Rightarrow$ zelenou křivku budeme v grafu dělit modrou.

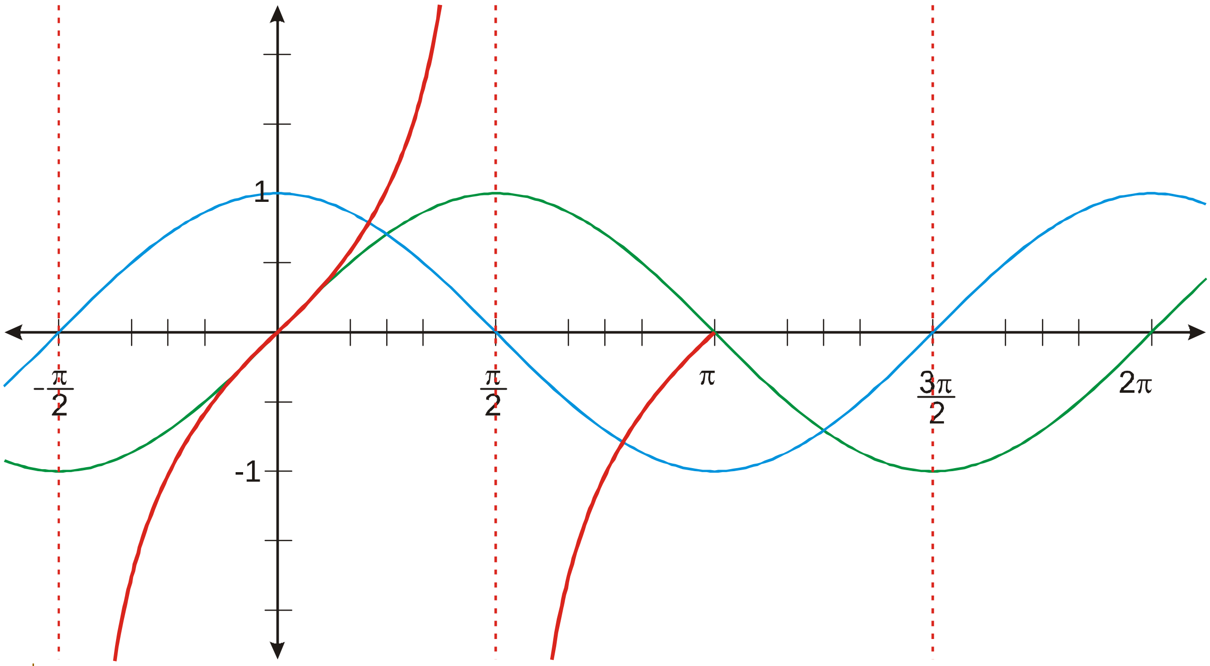
- V bodě $x = 0$ je hodnota funkce $y = \mathrm{tg}\, x$ rovna $\frac{0}{1} = 0$.
- V intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ dělíme hodnoty $\sin x$, nejdříve čísly blízkými 1, poté čísly, která se zmenšují. Pro $x$ blížící se $\frac{\pi}{2}$ budeme dělit velmi malými čísly. Získané hodnoty budou vždy větší než hodnoty $\sin x$, pro větší čísla $x$ se budou lišit více. Pro $x$ blížící se k $\frac{\pi}{2}$ se budou blížit nekonečnu.



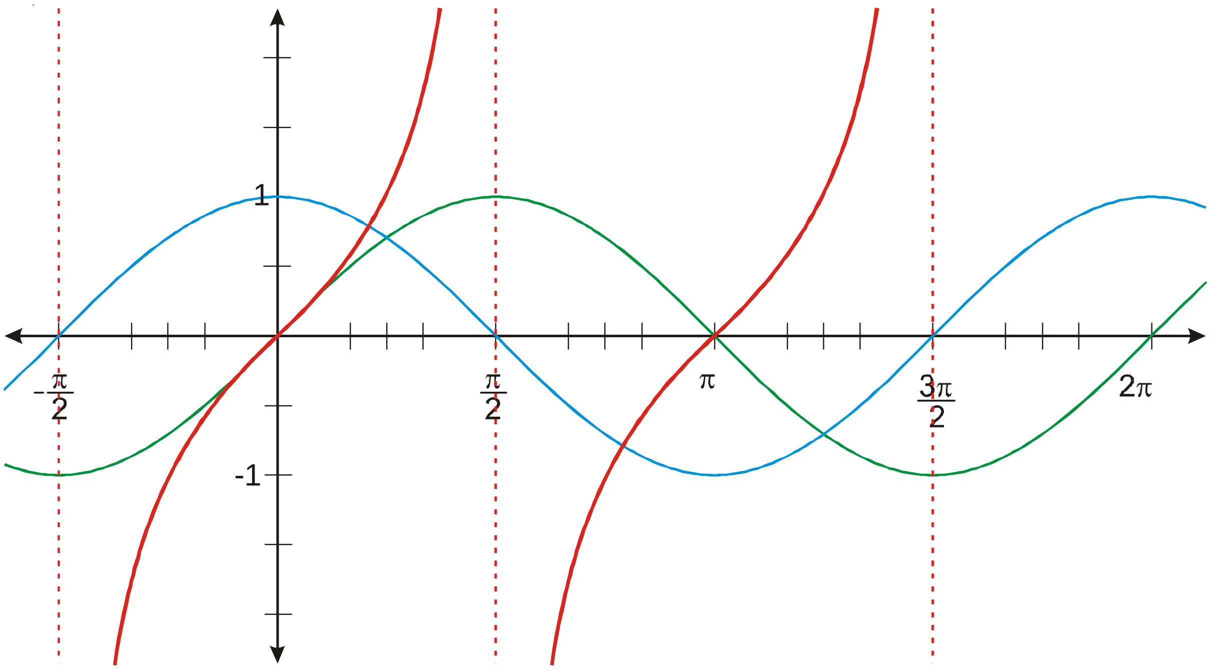
- Zkoumáme interval $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, postupujeme od nuly doleva. Dělíme hodnoty $\sin x$ (záporná čísla), nejdříve čísly blízkými 1, poté čísly, která se zmenšují. Pro $x$ blížící se $-\frac{\pi}{2}$ budeme dělit velmi malými čísly. Získané hodnoty budou vždy menší než hodnoty $\sin x$ (jsou to záporná čísla, jejich absolutní hodnota naopak poroste), pro menší čísla $x$ se budou lišit více. Pro $x$ blížící se k $-\frac{\pi}{2}$ se budou blížit mínus nekonečnu.



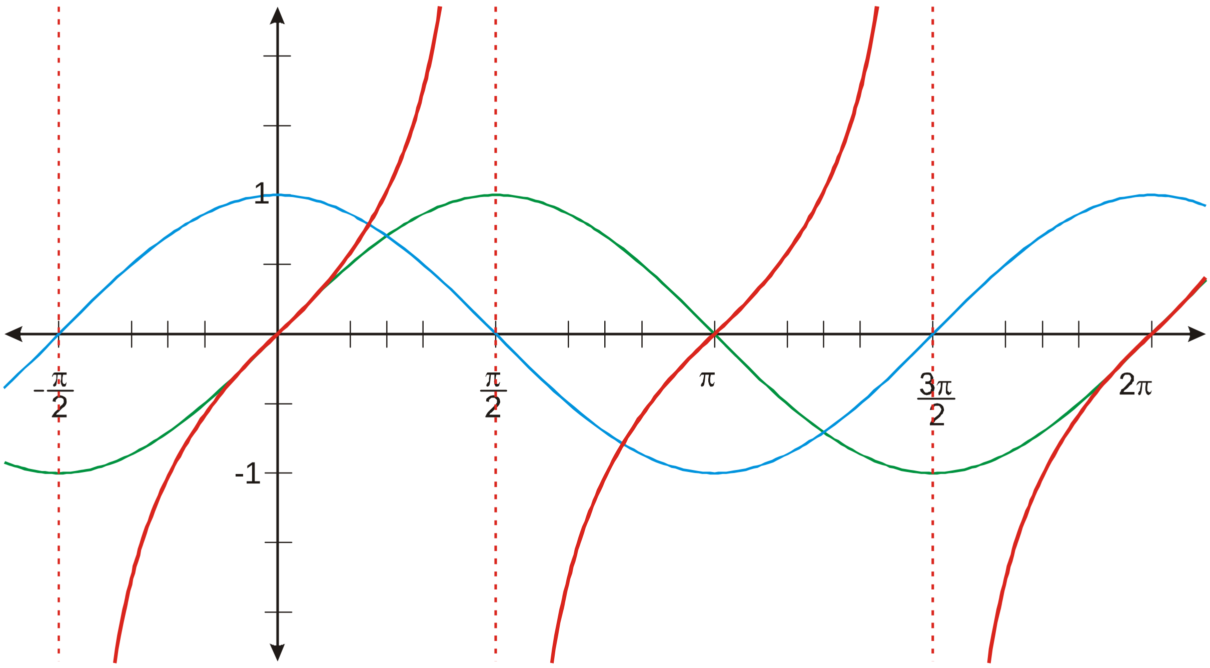

- V intervalu $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ nejdříve dělíme hodnoty $\sin x$ blížící se 1, zápornými čísly které se zmenšují od nuly k $-1$. Hodnoty podílu se na začátku intervalu blíží k mínus nekonečnu, pak se postupně zvětšují, až se dostanou k nule. Průběh funkce je podobný jako v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.




- V intervalu $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ dělíme dvě záporná čísla, výsledek tedy bude kladný. Hodnoty $\sin x$ se zmenšují od 0 k -1, Hodnota cosinus se zvětšuje od –1 k nule. Hodnota podílu se na začátku intervalu blíží k nule, pak postupně stoupá k nekonečnu. Průběh funkce je podobný jako v intervalu $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.



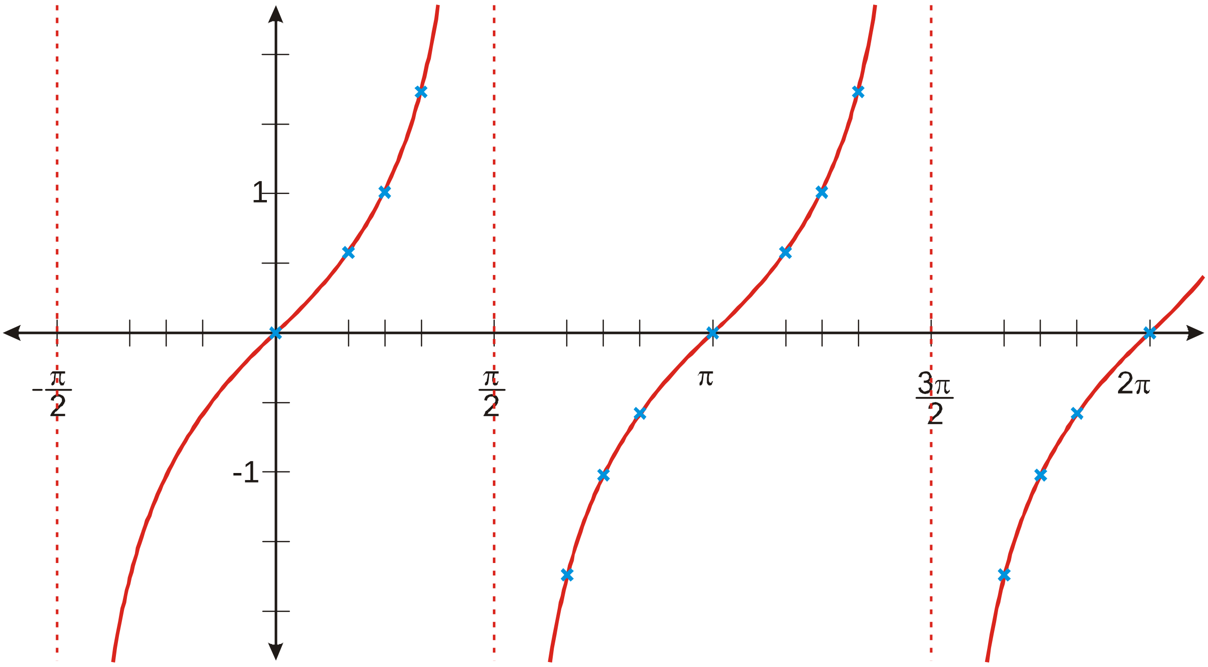

- Hodnoty v dalších intervalech můžeme zkopírovat z již nakreslené části grafu, protože funkce sinus i cosinus jsou periodické s nejmenší periodou $2\pi$ a výsledek jejich dělení se také musí opakovat.




**Př. 3:** V tabulce hodnot goniometrických funkcí doplň hodnoty pro tangens.

| **Úhel** [°] | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Úhel** [rad] | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ |
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |
| $\mathrm{tg}(x)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |
| **Úhel** [°] | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 | 300 | 315 | 330 | 360 |
| **Úhel** [rad] | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |
| $\sin(x)$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos(x)$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\mathrm{tg}(x)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

**Př. 4:** Zakresli hodnoty spočtené v tabulce do odhadnutého grafu funkce $y = \mathrm{tg}\, x$ a ověř tak správnost odhadu.




Tabulkové hodnoty potvrzují odhadnutý tvar grafu.

**Př. 5:** Z grafu funkce $y = \mathrm{tg}\, x$ urči její vlastnosti.

$D(f) = R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ Periodická s nejmenší periodou $\pi$.

$H(f) = R$ Není omezená $\Rightarrow$ nemá maximum ani minimum.

Lichá.

Rostoucí v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, dále pak v intervalu $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$, …, tedy ve všech intervalech $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Kladné hodnoty v intervalech $\left(0 + k \cdot \pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$.

Záporné hodnoty v intervalech $\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \pi + k \cdot \pi\right)$.

**Př. 6:** Dokaž pomocí definice funkce $y = \mathrm{tg}\, x$, že je funkce lichá.

Potřebujeme: $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}(x)$.

$$\mathrm{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$$

Použijeme vlastnosti goniometrických funkcí:

- sinus je lichý: $\sin(-x) = -\sin(x)$,

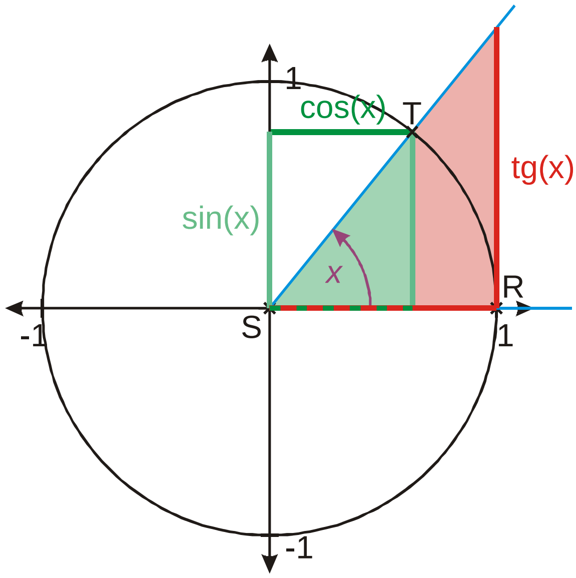
- cosinus je sudý: $\cos(-x) = \cos(x)$.

$\operatorname{tg}(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\operatorname{tg}(x) \Rightarrow$ dokázáno.

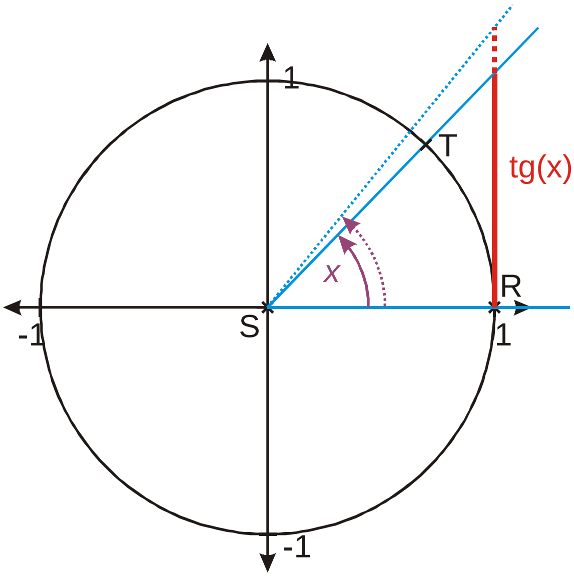
Je možné najít tangens v jednotkové kružnici?

Definice: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Upravíme definici tak, abychom mohli použít poměr stran u podobných trojúhelníků: $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Zelený trojúhelník už známe, červený trojúhelník musí být podobný zelenému a jeho kratší (vodorovná) odvěsna musí mít délku 1 $\Rightarrow$ trojúhelník zkonstruujeme, když v bodě *R* sestrojíme svislou přímku a necháme ji protnout s koncovým ramenem úhlu *x*. Svislá odvěsna má délku $\operatorname{tg} x$.

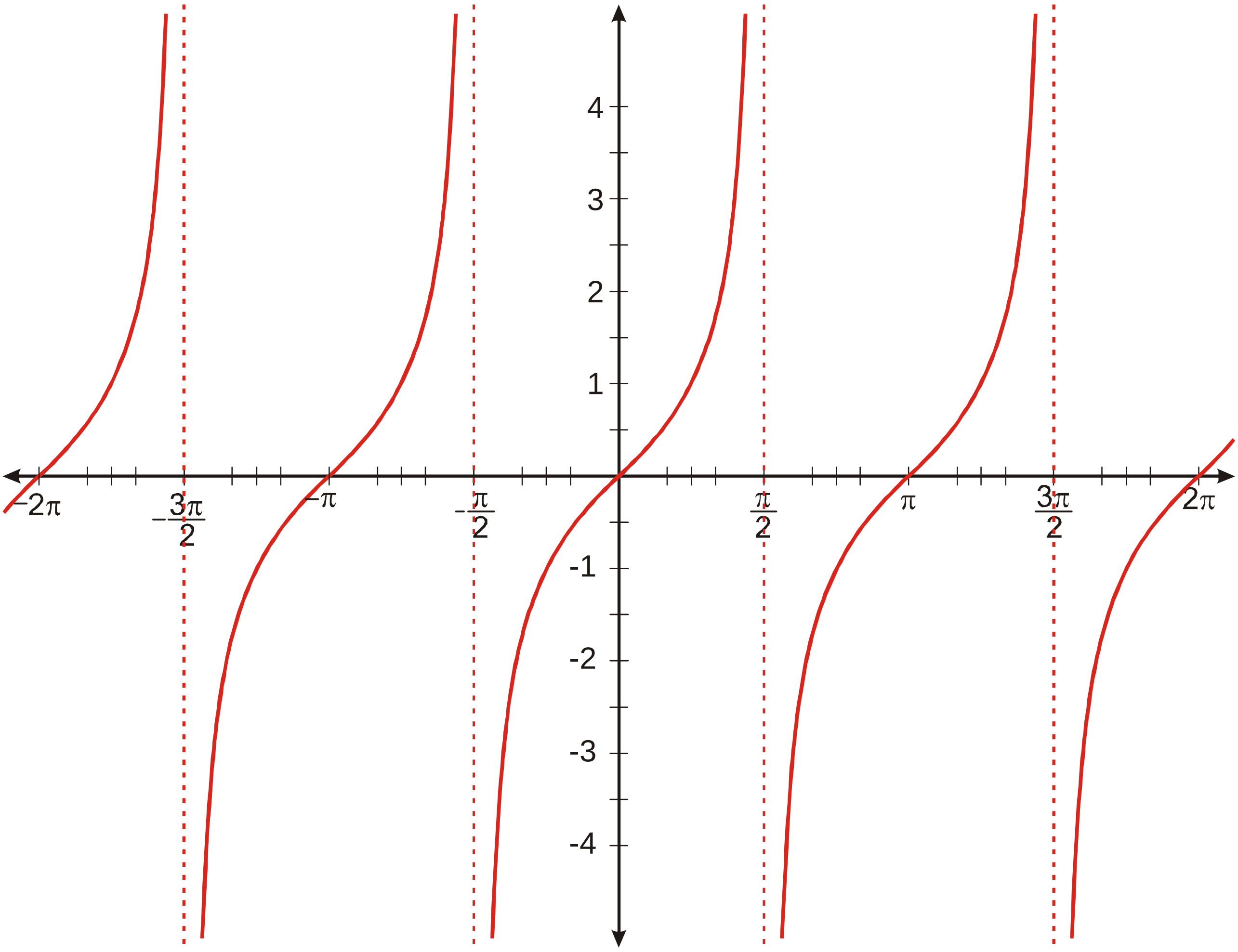


**Př. 7:** Pomocí znázornění funkce $y = \operatorname{tg} x$ na jednotkové kružnici zdůvodni, proč je v intervalu $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ funkce $y = \operatorname{tg} x$ rostoucí.

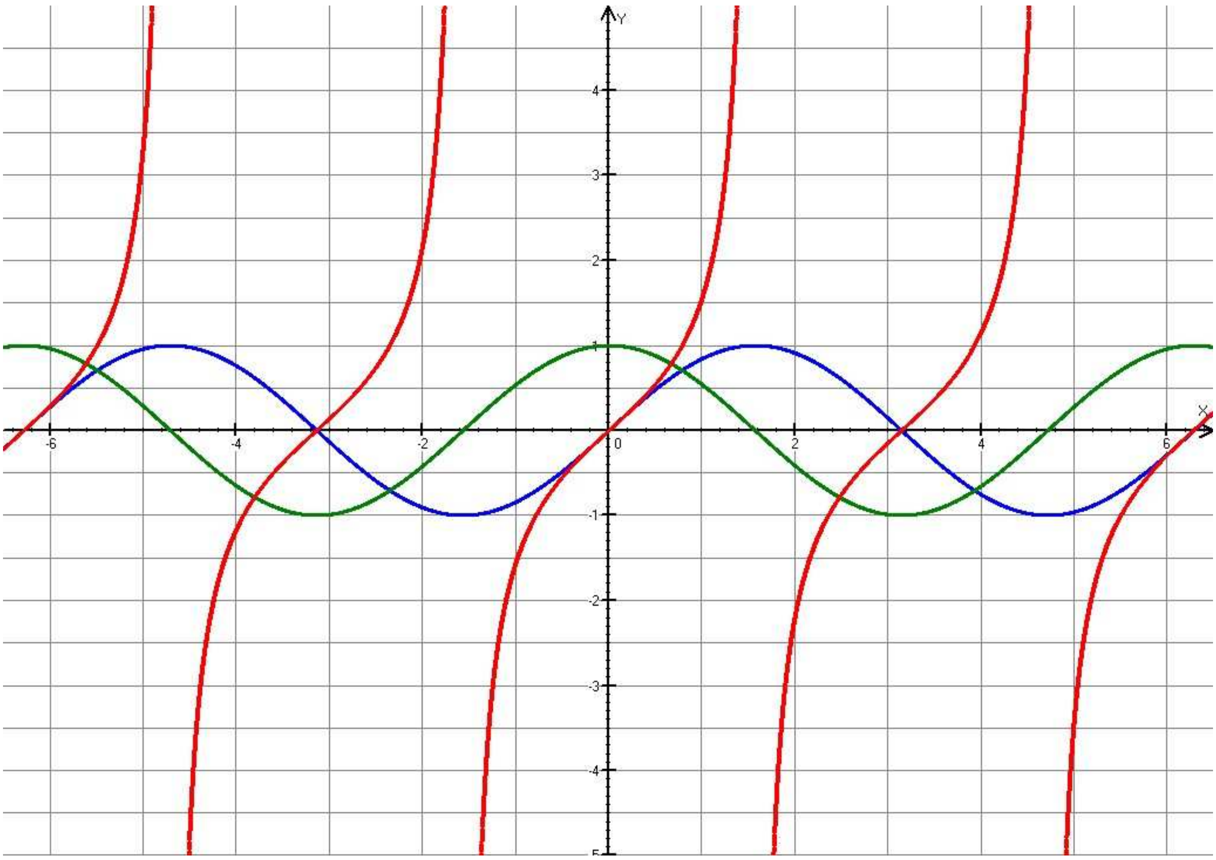



Z obrázku je zřejmé, že při zvětšování úhlu $x$ se zvětšuje hodnota $\operatorname{tg} x$.

V tomto okamžiku můžeme s klidem prohlásit naše grafy za správné. Graf funkce $y = \operatorname{tg} x$ vypadá takto:




Správnost grafu můžeme ověřit i pomocí počítačového programu:
Nakresleny jsou grafy funkcí $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$




**Př. 8:** Petáková:
strana 42/cvičení 27 $f_2$, $f_3$, $f_5$, $f_7$

**Shrnutí:** Funkci tangens definujeme jako podíl $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Je periodická s nejmenší periodou $\pi$ a definičním oborem $D(f) = R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.