

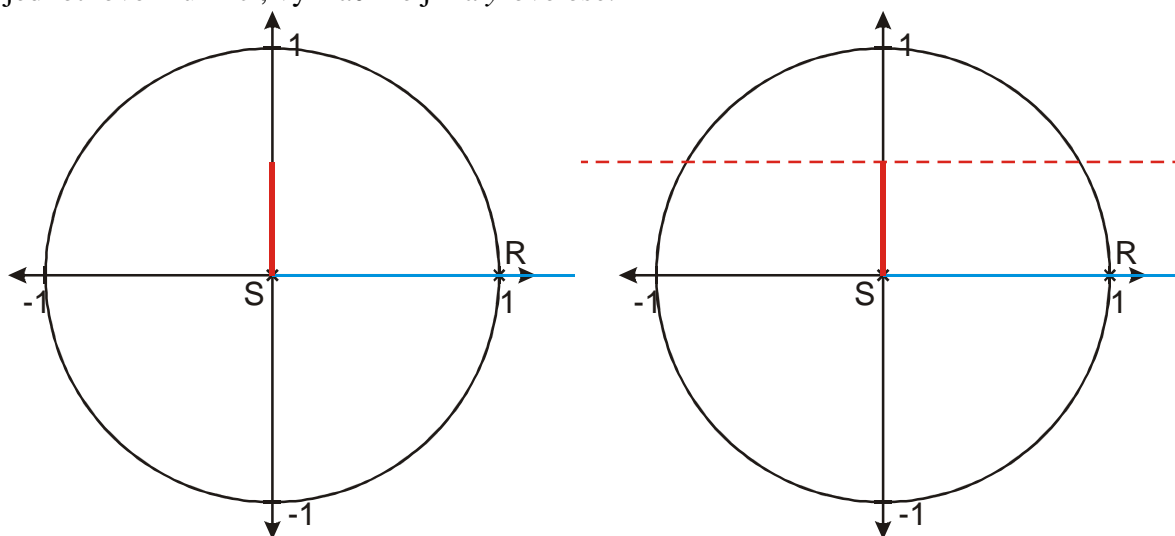
4.2.11 Hledání úhlů se známou hodnotou goniometrické funkce

Předpoklady: 4210

Př. 1: Najdi všechny úhly $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, pro které platí $\sin x = \frac{1}{2}$.

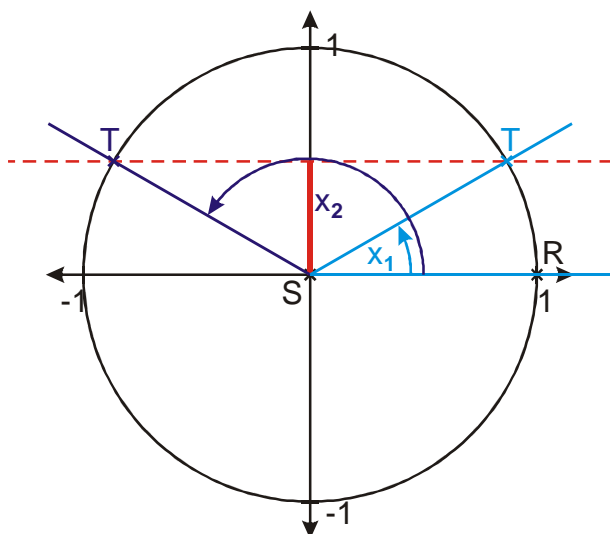
Postřeh: Obrácená úloha než dosud. Zatím jsme hledali pro úhly hodnoty goniometrických funkcí, teď hledáme k hodnotám úhly \Rightarrow stačí si pamatovat tabulku a víme, že $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Hledané číslo je $x = \frac{\pi}{6}$. Je to jediná možnost? $\Rightarrow \sin x$ je y-ová hodnota souřadnice bodu na jednotkové kružnici, vyznačíme ji na y-ové ose.



Vyznačíme všechny body, jejichž y-ová souřadnice je $\frac{1}{2} \Rightarrow$ vodorovná přímka $y = \frac{1}{2}$.

Vyznačená přímka se protíná s kružnicí ve dvou bodech \Rightarrow existují dva úhly, pro které platí $\sin x = \frac{1}{2}$.



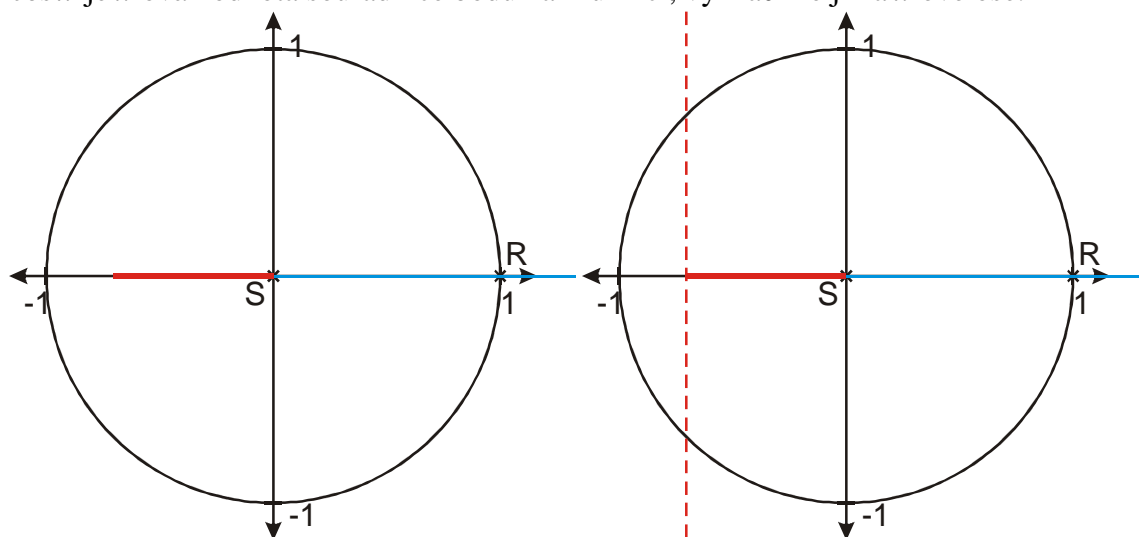
Již víme, že $x_1 = \frac{\pi}{6}$ (protože $\frac{1}{2}$ je „malá“ tabulková hodnota funkce sinus, musí být x_1

šestinová hodnota). Z obrázku je vidět, že platí $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$.

V intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ existují dvě čísla x , pro které platí $\sin x = \frac{1}{2}$: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ a $x_2 = \frac{5}{6}\pi$.

Př. 2: Najdi všechny úhly $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ pro které platí $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

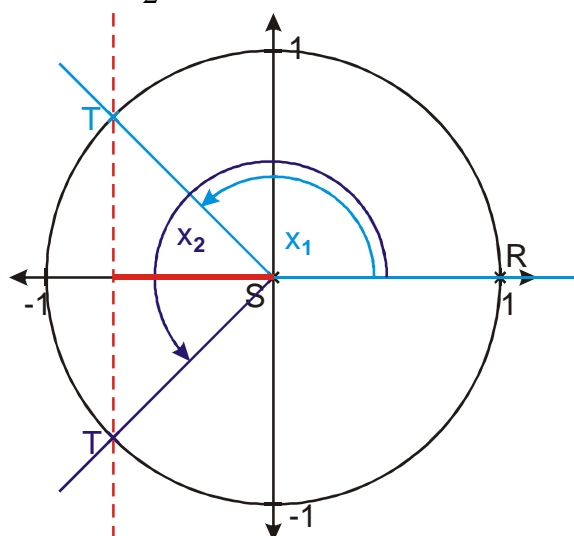
$\cos x$ je x -ová hodnota souřadnice bodu na kružnici, vyznačíme ji na x -ové ose.



Vyznačíme všechny body, jejichž x -ová souřadnice je $-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ svislá přímka $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vyznačená přímka se protíná s kružnicí ve dvou bodech \Rightarrow existují dva úhly, pro které platí

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



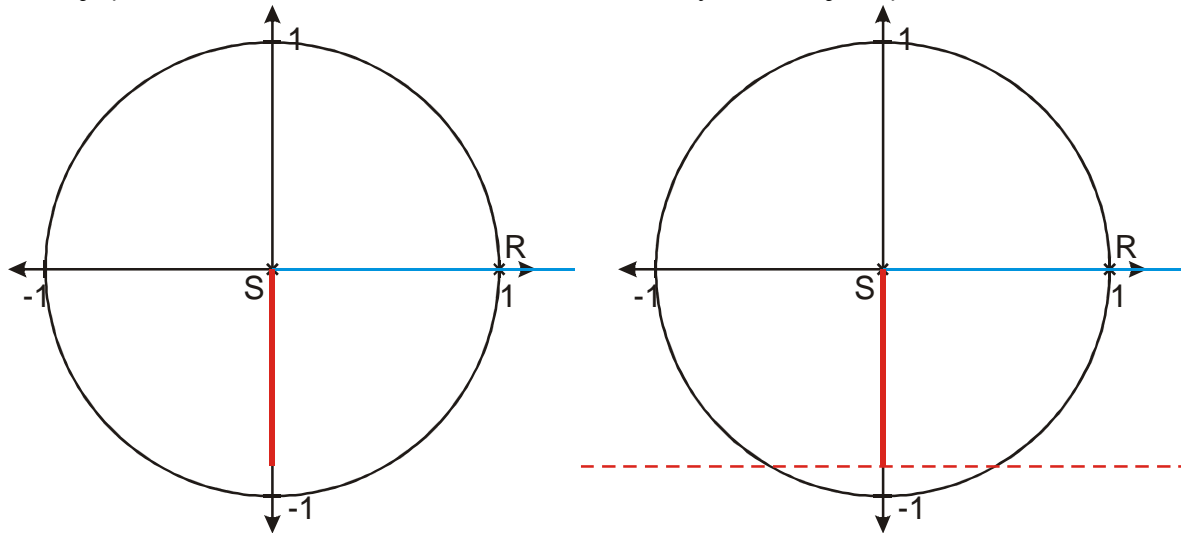
Protože $\frac{\sqrt{2}}{2}$ je „střední“ tabulková hodnota funkce cosinus, musí být x_1 a x_2 čtvrtinové

hodnoty. Z obrázku je vidět, že platí $x_1 = \frac{3}{4}\pi$ a $x_2 = \frac{5}{4}\pi$.

V intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ existují dvě čísla x , pro které platí $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $x_1 = \frac{3}{4}\pi$ a $x_2 = \frac{5}{4}\pi$.

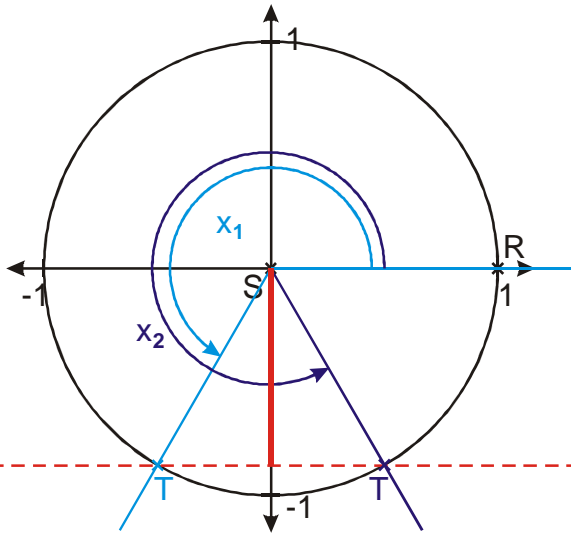
Př. 3: Najdi všechny úhly, pro které platí $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Postřeh: Nehledáme hodnoty pouze v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$, ale v celém \mathbb{R} . Stejně jako v předchozích příkladech najdeme nejdříve hodnoty v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ a pak využijeme periodicitu funkce $\sin x$ a určíme všechny možné hodnoty x .
 $\sin x$ je y-ová hodnota souřadnice bodu na kružnici, vyznačíme ji na y-ové ose.



Vyznačíme všechny body, jejichž y-ová souřadnice je $-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ vodorovná přímku $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vyznačená přímka se protíná s kružnicí ve dvou bodech \Rightarrow existují dva úhly, pro které platí $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Protože $\frac{\sqrt{3}}{2}$ je „velká“ tabulková hodnota funkce sinus, musí být x_1 a x_2 třetinové hodnoty.

Z obrázku je vidět, že platí $x_1 = \frac{4}{3}\pi$ a $x_2 = \frac{5}{3}\pi$.

V intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ existují dvě čísla x , pro které platí $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$: $x_1 = \frac{4}{3}\pi$ a $x_2 = \frac{5}{3}\pi$.

Hledáme všechna $x \in R$, pro která platí $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Funkce $y = \sin x$ je periodická s nejmenší periodou $2\pi \Rightarrow$ hodnoty funkce pro x_1 jsou stejné jako hodnoty funkce pro $x_1 + k \cdot 2\pi$, $k \in Z$.

Požadovanou vlastnost mají všechna čísla $\frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ a $\frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi$, kde $k \in Z$. Tato

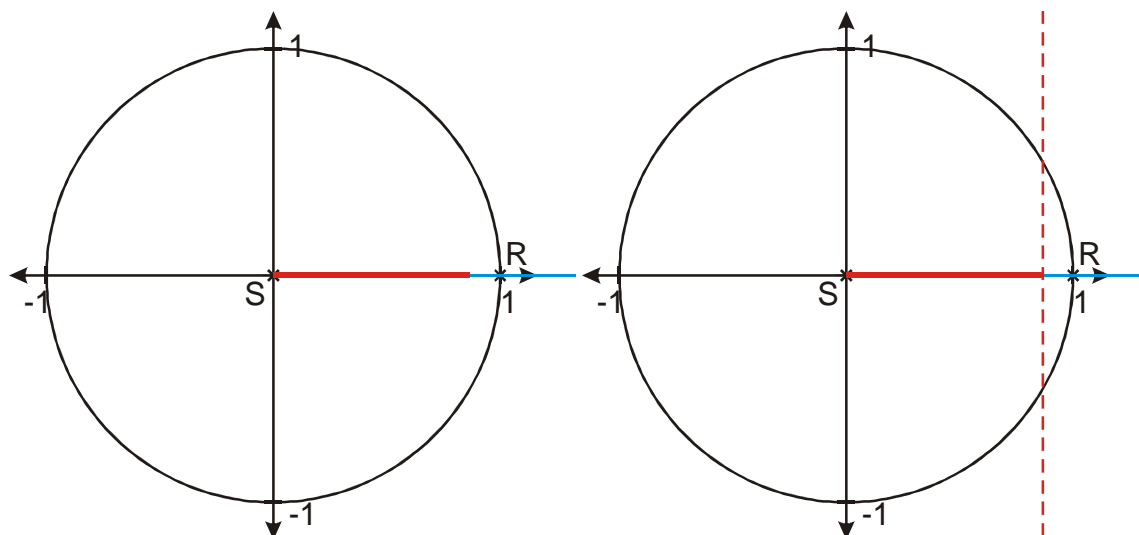
množina čísel se většinou zapisuje $\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$.

Př. 4: Najdi všechny úhly $x \in R$, pro které platí $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \sin x < 0$.

Příklad vyřešíme nejdříve v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ a pak najdeme ostatní řešení z R .

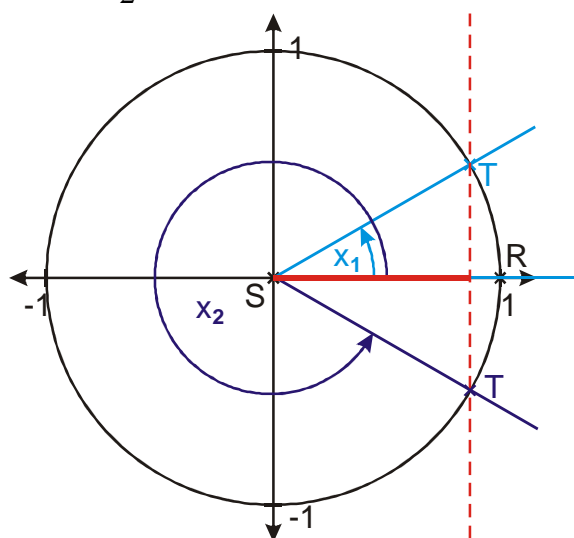
Jako první hledáme x splňující podmínku $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos x$ je x -ová hodnota souřadnice bodu na kružnici, vyznačíme ji na x -ové ose.



Vyznačíme všechny body, jejichž x -ová souřadnice je $\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ svislá přímka $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vyznačená přímka se protíná s kružnicí ve dvou bodech \Rightarrow existují dva úhly, pro které platí $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

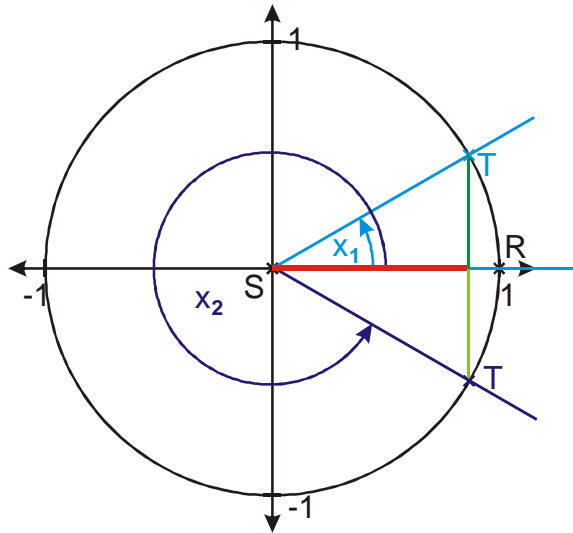


Protože $\frac{\sqrt{3}}{2}$ je „velká“ tabulková hodnota funkce cosinus, musí být x_1 a x_2 šestinové

hodnoty. Z obrázku je vidět, že platí $x_1 = \frac{\pi}{6}$ a $x_2 = \frac{11}{6}\pi$.

V intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ existují dvě čísla x , pro které platí $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ a $x_2 = \frac{11}{6}\pi$.

Teď splníme druhou podmínku $\sin x < 0$. Dokreslíme do obrázku hodnoty funkce $\sin x$ pro oba úhly.



Z obrázku je zřejmé, že platí $\sin x_1 = \sin \frac{\pi}{6} > 0$ a $\sin x_2 = \sin \frac{11}{6}\pi < 0$.

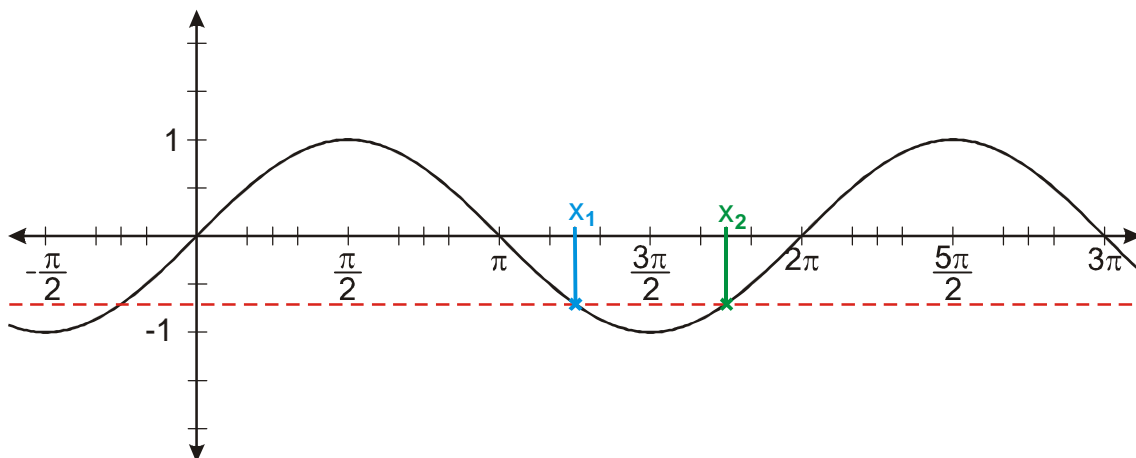
Zadání příkladu $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \sin x < 0$ splňuje v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ pouze úhel $x_2 = \frac{11}{6}\pi$.

Obě funkce jsou periodické s nejmenší periodou $2\pi \Rightarrow$ řešením příkladu jsou všechna x z množiny: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$.

Všechny předchozí příklady je možné řešit nejen pomocí jednotkové kružnice, ale i pomocí grafů funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$.

Př. 5: Najdi všechny úhly $x \in \mathbb{R}$, pro které platí $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Při řešení využij graf funkce $y = \sin x$.

V obrázku s grafem funkce $y = \sin x$ vyznačíme všechny body, jejichž y-ová souřadnice (hodnota funkce $y = \sin x$) je $-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ přímka $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Vyznačená přímka se v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ protíná s grafem ve dvou bodech \Rightarrow existují dva úhly z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$, pro které platí $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

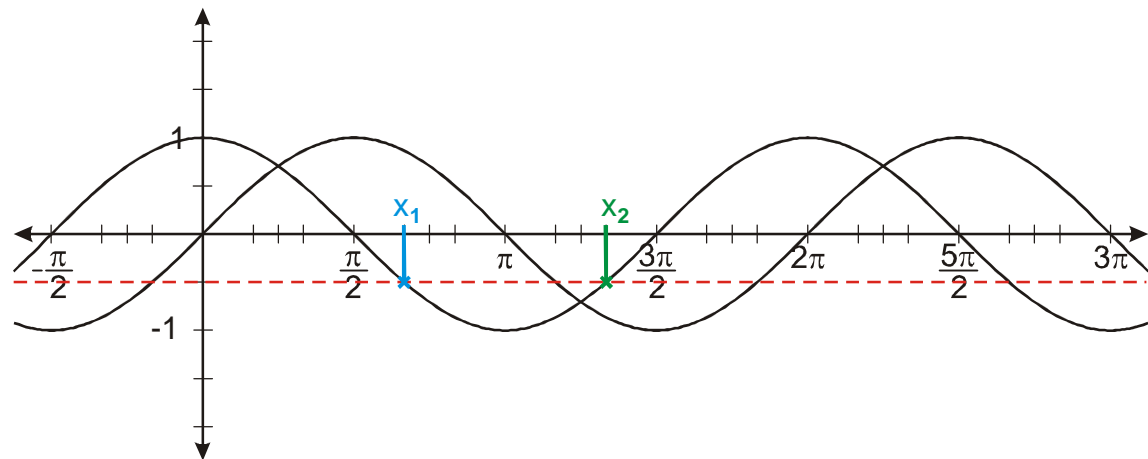
Protože $\frac{\sqrt{2}}{2}$ je „střední“ tabulková hodnota funkce sinus, musí být x_1 a x_2 čtvrtinové hodnoty. Z obrázku je vidět, že platí $x_1 = \frac{5}{4}\pi$ a $x_2 = \frac{7}{4}\pi$.

Funkce sinus je periodická s nejmenší periodou $2\pi \Rightarrow$ hledaná čísla tvoří množinu

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{7}{4}\pi + k \cdot 2\pi \right\}.$$

Př. 6: Najdi všechny úhly $x \in \mathbb{R}$, pro které platí $\cos x = -\frac{1}{2} \wedge \sin x < 0$. Při řešení využij grafy funkcí sinus a cosinus.

V obrázku s grafy funkcí $y = \cos x$ vyznačíme všechny body, jejichž y-ová souřadnice (hodnota funkce $y = \cos x$) je $-\frac{1}{2} \Rightarrow$ přímka $y = -\frac{1}{2}$.



Vyznačená přímka se v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ protíná s grafem ve dvou bodech \Rightarrow existují dva úhly z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$, pro které platí $\cos x = -\frac{1}{2}$, pouze pro druhou hodnotu x_2 je hodnota funkce $y = \sin x$ záporná.

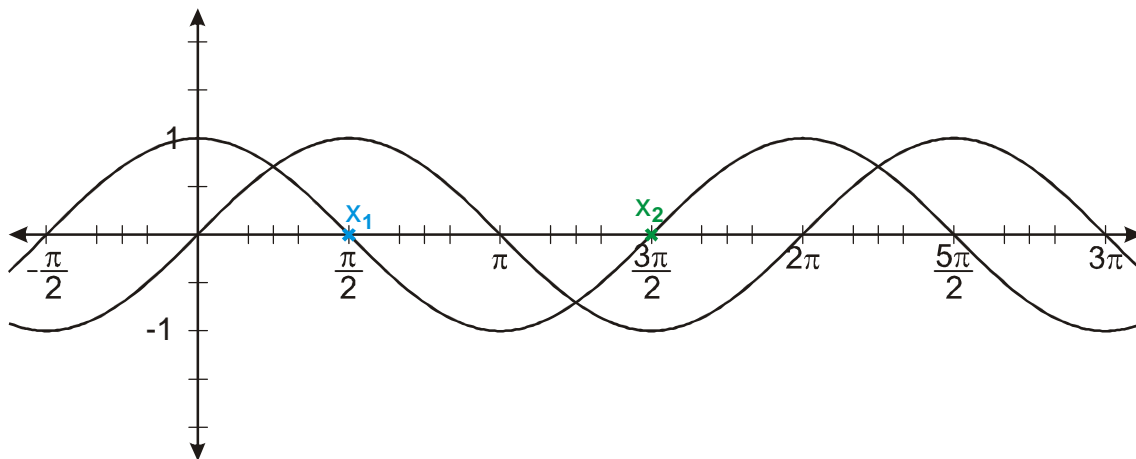
Protože $-\frac{1}{2}$ je „malá“ tabulková hodnota funkce cosinus, musí být x_1 a x_2 třetinové hodnoty.

Z obrázku je vidět, že platí $x_2 = \frac{4}{3}\pi$ (hodnota $x_1 = \frac{2}{3}\pi$ nás nezajímá).

Funkce cosinus je periodická s nejmenší periodou $2\pi \Rightarrow$ hledaná čísla tvoří množinu

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}.$$

Př. 7: Najdi všechny úhly $x \in R$, pro které platí $\cos x = 0 \wedge \sin x > 0$.

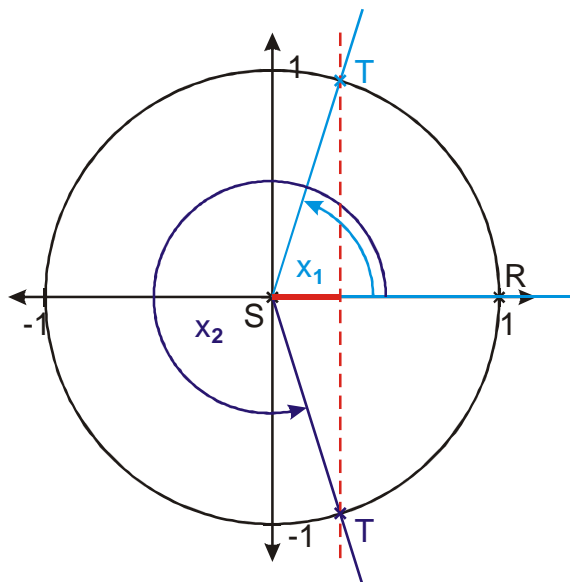


Z obrázku s grafy funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$ je vidět, že jediným úhlem v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ pro který platí podmínky ze zadání je úhel $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ hledaná čísla tvoří množinu

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\}.$$

Př. 8: Najdi všechny úhly $x \in R$, pro které platí $\cos x = 0,3$. Při řešení využij jednotkovou kružnici. Nalezené hodnoty vyjádři ve stupních s přesností na minuty.

Hodnota 0,3 nepatří mezi tabulkové hodnoty funkce $\cos x$. Použijeme tlačítko \cos^{-1} na kalkulačce. Platí: $\cos^{-1}(0,3) = 72^\circ 33'$. Zakreslíme situaci do jednotkové kružnice.



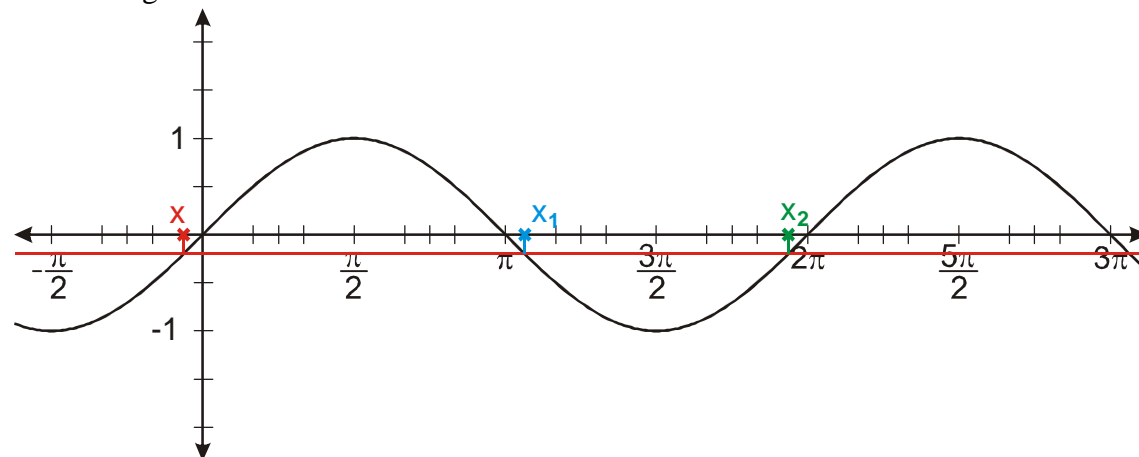
Z obrázku vidíme, že platí:

- $x_1 = 72^\circ 33'$,
- $x_2 = 360^\circ - x_1 = 360^\circ - 72^\circ 33' = 287^\circ 27'$.

\Rightarrow Hledaná čísla tvoří množinu $\bigcup_{k \in Z} \{72^\circ 33' + k \cdot 360^\circ; 287^\circ 27' + k \cdot 360^\circ\}$.

Př. 9: Najdi všechny úhly $x \in R$, pro které platí $\sin x = -0,2$. Při řešení využij graf funkce $y = \sin x$. Nalezené hodnoty vyjádři ve stupních s přesností na minuty.

Hodnota $-0,2$ nepatří mezi tabulkové hodnoty funkce $\sin x$. Použijeme tlačítko \sin^{-1} na kalkulačce. Platí: $\sin^{-1}(-0,2) = -11^\circ 32'$ (tento úhel není základní velikostí). Zakreslíme situaci do grafu.



Z obrázku vidíme, že platí:

- $x_1 = 180^\circ - x = 180^\circ - (-11^\circ 32') = 191^\circ 32'$,
- $x_2 = 360^\circ + x = 360^\circ + (-11^\circ 32') = 348^\circ 28'$.

\Rightarrow Hledaná čísla tvoří množinu $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{191^\circ 32' + k \cdot 360^\circ; 348^\circ 28' + k \cdot 360^\circ\}$.

Př. 10: Petáková:

- strana 41/cvičení 10 b) c)
- strana 41/cvičení 11 c)
- strana 41/cvičení 12 b)
- strana 41/cvičení 13 c)
- strana 41/cvičení 14 c)

Shrnutí: