4.2.10 Rychlé určování hodnot funkcí sinus a cosinus

Předpoklady: 4207, 4208

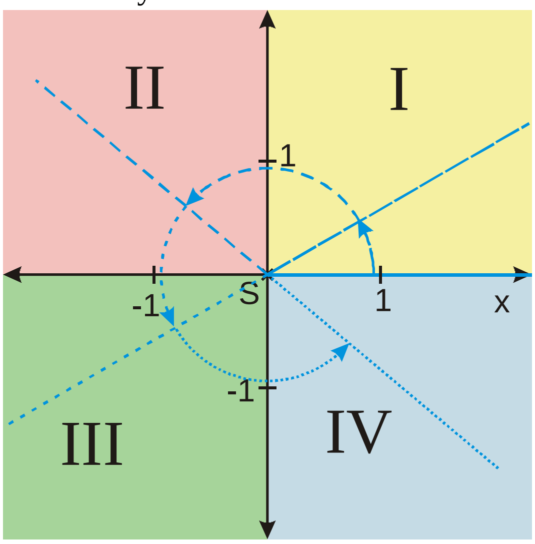
Pedagogická poznámka: Tato kapitola nepřináší nic nového. Sám autor si myslí, že by bylo lepší, kdyby si studenti metodu rychlého určování hodnot vymysleli sami. Zkušenosti však ukazují, že ani ti průměrní nejsou schopni během krátké doby, která se látce ve škole věnuje, vyvinout uspokojivou metodu s jejíž pomocí by byli schopni spolehlivě a rychle určit hodnoty goniometrických funkcí. Proto zde uvádí metodu, kterou sám používá, aby si nemusel pamatovat celou tabulku hodnot a zároveň dokázal v podstatě okamžitě určit hodnotu libovolné goniometrické funkce. Rozhodně to neznamená, že je nutné používat tento postup nebo že není možné vymyslet jiný, případně nějakou modifikaci.

Potřebujeme určit hodnotu $\sin 330°$. Jak můžeme postupovat?

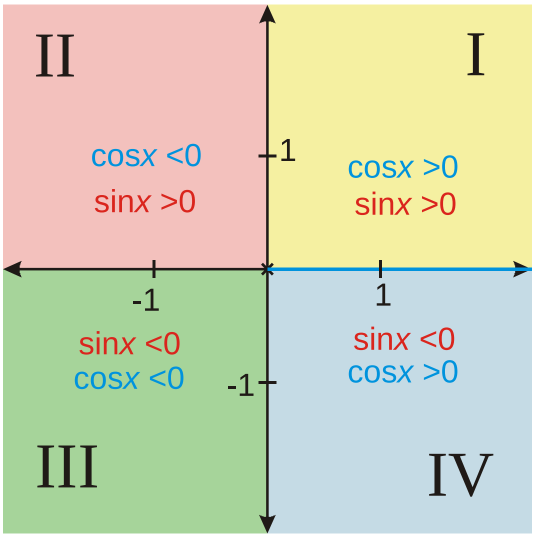
- Podívat se do tabulky.
  Nevýhoda: Bez tabulky jsme v koncích (a namydlení).
- Pamatovat si výsledek uvedený v tabulce.
  Nevýhoda: Musíme si pamatovat spoustu údajů, které se navzájem pletou.
- Nakreslit si obrázek a hodnotu spočítat, jak jsme dělali při doplňování tabulky.
  Nevýhoda: Strašně zdlouhavé.

$\Rightarrow$ Různé způsoby vybavování hodnot, které nevyžadují příliš mnoho pamatování a jsou rychlé.

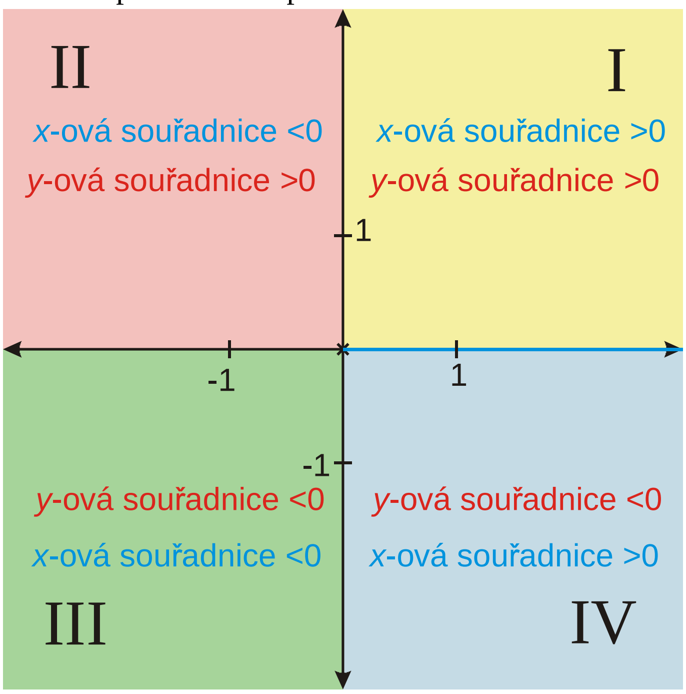
Opakování: Souřadná rovina je souřadnými osami rozdělena na kvadranty, které jsou očíslovány podle pořadí, ve kterém do nich směřují koncová ramena postupně se zvětšujících orientovaných úhlů.



Př. 1: Dopiš do obrázku do každého kvadrantu znaménko hodnot goniometrických funkcí.



Uvedené nerovnosti platí nejenom pro hodnoty $\sin x$ a $\cos x$, ale i pro souřadnice všech bodů, které se v daných kvadrantech nalézají ($\sin x$ a $\cos x$ nejsou nic víc než souřadnice bodů v kvadrantu, proto pro ně musí platit to samé, co platí pro libovolný bod).
Obrázek pak můžeme překreslit i takto:



Pedagogická poznámka: Předchozí upozornění není zbytečné. Studenti mají tendence hledat v předchozím úkolu něco tajemného a výjimečného.

Př. 2: Prohlédni tabulku s hodnotami goniometrických funkcí a najdi v ní co nejvíce pravidel.

Úkol může být splněn různě, následující povídání je jen jednou z možností.

Úhly můžeme podle hodnot goniometrických funkcí rozdělit do čtyř skupin:

Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Úhel [°]	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

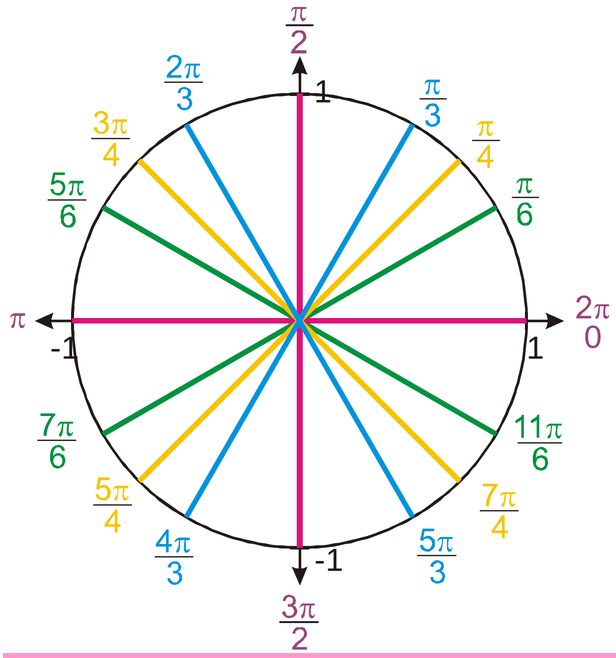
Násobky $\frac{\pi}{2}$: jedna z goniometrických funkcí má nulovou hodnotu, hodnota druhé se rovna 1 nebo –1 (nakreslením úhlu hned určíme hodnoty).

Úhly, pro jejichž vyjádření v obloukové míře používáme zlomek se 4 ve jmenovateli, **(„čtvrtinový“ úhel)**: absolutní hodnota $\sin x$ i $\cos x$ je stejná $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (nakreslením úhlu zbývá určit pouze znaménko).

Úhly, pro jejichž vyjádření v obloukové míře používáme zlomek se 6 ve jmenovateli, **(„šestinový“ úhel)**: absolutní hodnota $\sin x$ se rovná $\frac{1}{2}$ a je menší než absolutní hodnota $\cos x$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (nakreslením úhlu zbývá určit pouze znaménko).

Úhly při jejich vyjádření v obloukové míře používáme zlomek se 3 ve jmenovateli **(„třetinový“ úhel)**: absolutní hodnota $\sin x$ se rovná $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a je větší než absolutní hodnota $\cos x$ $\frac{1}{2}$ (nakreslením úhlu zbývá určit pouze znaménko)

Předchozí postřehy jsou dobře rozeznatelné i z obrázku, na kterém jsou barevně nakreslena konečná ramena jednotlivých úhlů v jednotkové kružnici.



Násobky $\frac{\pi}{2}$ jsou rovnoběžné se souřadnými osami $\Rightarrow$ jedna z goniometrických funkcí musí být nulová a druhá 1 nebo –1.

Čtvrtinové úhly půlí kvadranty $\Rightarrow$ leží na jejich osách $\Rightarrow$ sinus i cosinus mají stejnou absolutní hodnotu $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Šestinové úhly přimykají více k ose *x* $\Rightarrow$ velikost *x*-ové složky souřadnice bodu na kružnici je větší než velikost souřadnice *y*-ové $\Rightarrow$ absolutní hodnota cosinu je „velké“ číslo $\frac{\sqrt{3}}{2}$, absolutní hodnota sinu je „malé“ číslo $\frac{1}{2}$.

Třetinové úhly přimykají více k ose *y* $\Rightarrow$ velikost *y*-ové složky souřadnice bodu na kružnici je větší než velikost souřadnice *y*-ové $\Rightarrow$ absolutní hodnota sinu je „velké“ číslo $\frac{\sqrt{3}}{2}$, absolutní hodnota cosinu je „malé“ číslo $\frac{1}{2}$ (opačná situace než u šestinových úhlů).

Teď už můžeme sestavit postup na rychlé určení hodnoty:
1. Podle druhu goniometrické funkce sledujeme *x*-ovou nebo *y*-ovou souřadnici.
2. Zjistíme, do jaké skupiny patří úhel, jehož hodnotu určujeme, a tím určíme absolutní hodnotu goniometrické funkce.
3. Zjistíme, v jakém kvadrantu hodnotu určujeme, a podle toho přidělíme znaménko.

Př. 3: Urči $\sin\frac{7}{6}\pi$.

Hledáme sinus $\Rightarrow$ sledujeme *y*-vou souřadnici.
Úhel $\frac{7}{6}\pi$ je šestinový $\Rightarrow$ přimyká k ose *x* $\Rightarrow$ malá *y*-ová souřadnice $\Rightarrow$ sinus $\left|\sin\frac{7}{6}\pi\right| = \frac{1}{2}$.

Úhel $\frac{7}{6}\pi$ směřuje do třetího kvadrantu $\Rightarrow$ y-ová souřadnice je záporná.
$\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2}$.

Př. 4: Urči $\cos 180°$.

Hledáme cosinus $\Rightarrow$ sledujeme x-vou souřadnici.
Úhel $180°$ je násobek $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ možné hodnoty 0; 1; -1.
Koncové rameno splývá se souřadnou osou x $\Rightarrow$ x-ová souřadnice je –1.
$\cos 180° = -1$.

Př. 5: Urči $\sin\frac{3}{4}\pi$.

Hledáme sinus $\Rightarrow$ sledujeme y-vou souřadnici.
Úhel $\frac{3}{4}\pi$ je čtvrtinový $\Rightarrow$ půlí kvadrant $\Rightarrow$ absolutní hodnota obou souřadnic stejná $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Úhel $\frac{3}{4}\pi$ směřuje do druhého kvadrantu $\Rightarrow$ y-ová souřadnice je kladná.
$\sin\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Př. 6: Urči $\cos 300°$.

Hledáme cosinus $\Rightarrow$ sledujeme x-vou souřadnici.
Úhel $300° = \frac{5}{3}\pi$ je třetinový $\Rightarrow$ přimyká k ose y $\Rightarrow$ malá x-ová souřadnice a tedy malá velikost cosinus $\frac{1}{2}$.
Úhel $300°$ směřuje do čtvrtého kvadrantu $\Rightarrow$ x-ová souřadnice je kladná.
$\cos 300° = \frac{1}{2}$.

Př. 7: Urči hodnoty následujících goniometrických funkcí:

a) $\sin\frac{7}{4}\pi$ b) $\cos\frac{3}{2}\pi$ c) $\cos\frac{11}{6}\pi$ d) $\sin\frac{4}{3}\pi$
e) $\sin\frac{7}{6}\pi$ f) $\cos\frac{5}{4}\pi$ g) $\cos\frac{5}{3}\pi$ h) $\sin\pi$

a) $\sin\frac{7}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$ c) $\cos\frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2}$ f) $\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\cos\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2}$ h) $\sin\pi = 0$

Shrnutí: Hodnoty goniometrických funkcí můžeme rychle určovat, když si uvědomíme, že tabulkové hodnoty úhlů můžeme rozdělit do čtyř skupin.