4.2.11 Grafy funkcí odvozených z funkcí sinus a cosinus II

Předpoklady: 4210

Pedagogická poznámka: Pokud máte málo času můžete z této hodiny vyřešit pouze první tři příklady a ve zbývajících 25 minutách projít následující hodinu s tím, že studenti budou mít méně času na samostatné přemýšlení.

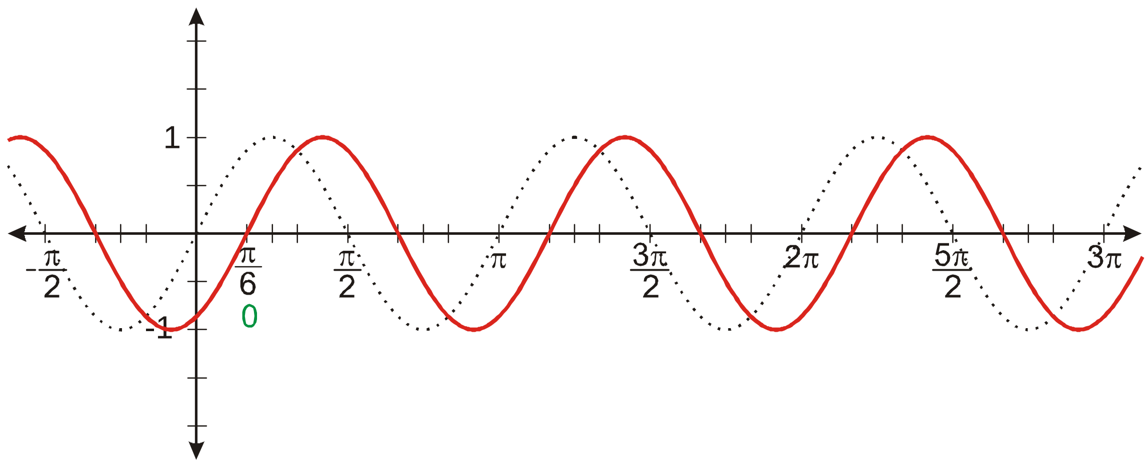
Př. 1: Nakresli graf funkce $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Funkce sinus „začíná", když do sinu dosadíme číslo 0 $\Rightarrow$ $2x-\frac{\pi}{3}=0$ $\Rightarrow$ $2x=\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ $x=\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ upravíme vnitřek funkce tak, aby bylo vidět posunutí: $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

$\Rightarrow$ Graf bude posunutý o $\frac{\pi}{6}$ doprava a bude dvakrát „zahuštěný" (nejmenší perioda bude dvakrát menší než u funkce $\sin x$).

Graf posunuté funkce budeme kreslit pomocí grafu funkce $y=\sin(2x)$.



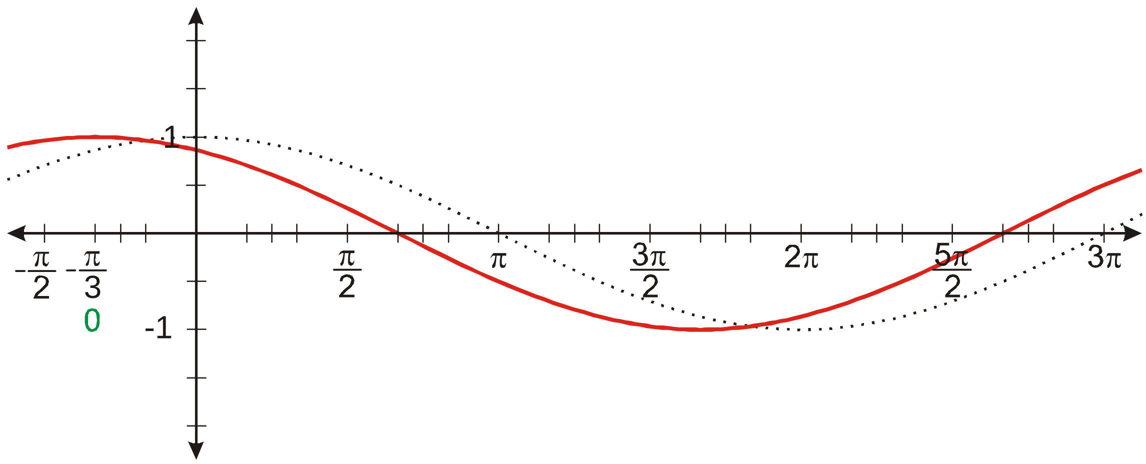
Př. 2: Nakresli graf funkce $y=\cos\left(0,5x+\frac{\pi}{6}\right)$.

Funkce cosinus „začíná", když do cosinu dosadíme číslo 0 $\Rightarrow$ $0,5x+\frac{\pi}{6}=0$ $\Rightarrow$ $0,5x=-\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ $x=-\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ upravíme vnitřek funkce tak, aby bylo vidět posunutí:

$y=\cos\left(0,5x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[0,5\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$. $\Rightarrow$ Graf bude posunutý o $\frac{\pi}{3}$ doleva a bude dvakrát „protažený" (nejmenší perioda bude dvakrát větší než u funkce $\cos x$).

Graf posunuté funkce budeme kreslit pomocí grafu funkce $y=\cos(0,5x)$.



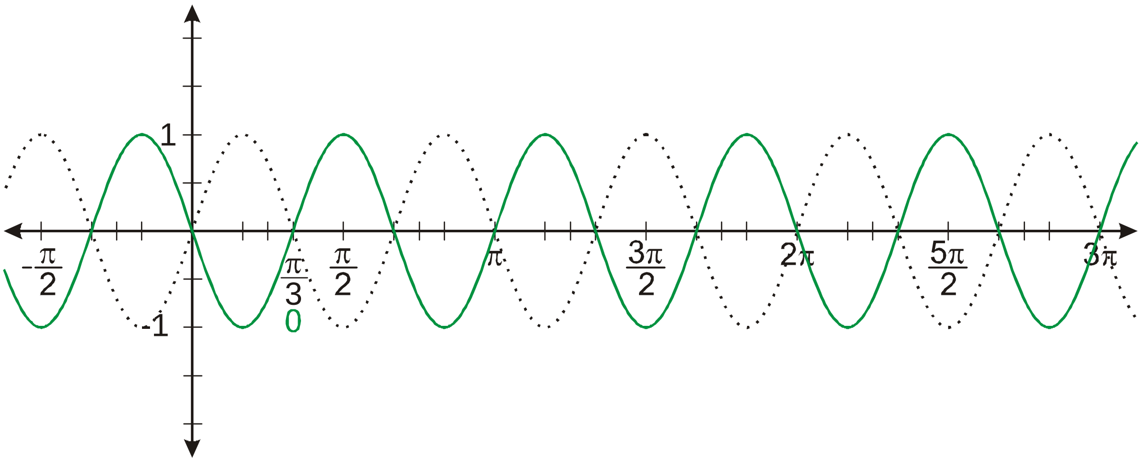
Př. 3: Je dána funkce $y = a\sin(bx + c) + d$. Rozhodni, jaký vliv mají na tvar grafu hodnoty parametrů *a*, *b*, *c*, *d*.

Parametr *a* – určuje „roztažení" grafu ve svislém směru (funkce $y = \sin x$ má svislou velikost 2, funkce $y = a\sin(bx + c) + d$ má svislou velikost $2|a|$). Pokud $a < 0$ graf funkce se převrátí ve svislém směru.
Parametr *b* – určuje „roztažení" grafu ve vodorovném směru (funkce $y = \sin x$ má nejmenší periodu 2π, funkce $y = a\sin(bx + c) + d$ má nejmenší periodu $\frac{2\pi}{|b|}$). Pokud $b < 0$ graf funkce se převrátí ve vodorovném směru.
Parametr *c* – spolu s parametrem *b* určuje posunutí grafu ve vodorovném směru (funkce $y = \sin x$ „začíná" v bodě $x = 0$, funkce $y = a\sin(bx + c) + d$ „začíná" v bodě $x = -\frac{c}{b}$).
Parametr *d* – určuje posunutí grafu ve svislém směru (funkce $y = \sin x$ obíhá okolo přímky $y = 0$, funkce $y = a\sin(bx + c) + d$ obíhá okolo přímky $y = d$).

Př. 4: Nakresli graf funkce $y = 0{,}5\sin(3x - \pi) + 1$.

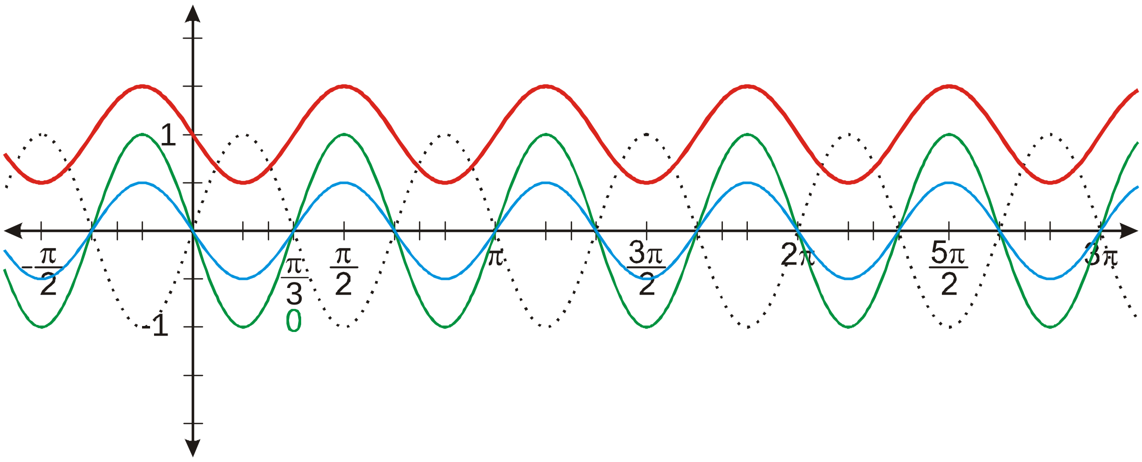
Upravíme vnitřek funkce tak, aby bylo vidět posunutí:
$y = 0{,}5\sin(3x - \pi) + 1 = 0{,}5\sin\left[3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] + 1$.

$\Rightarrow$ Graf bude posunutý o $\frac{\pi}{3}$ doprava a bude třikrát „zkrácený" (nejmenší perioda bude třikrát menší než u funkce $\sin x$).
Graf posunuté funkce $y = \sin\left[3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$ budeme kreslit pomocí grafu funkce $y = \sin(3x)$.



Pomocí grafu funkce: $y=\sin\left[3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]$ nakreslíme grafy funkcí:

$y=0{,}5\sin\left[3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]$ a $y=0{,}5\sin\left[3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]+1$.



Př. 5: Nakresli graf funkce $y=\frac{\pi}{2}\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$.

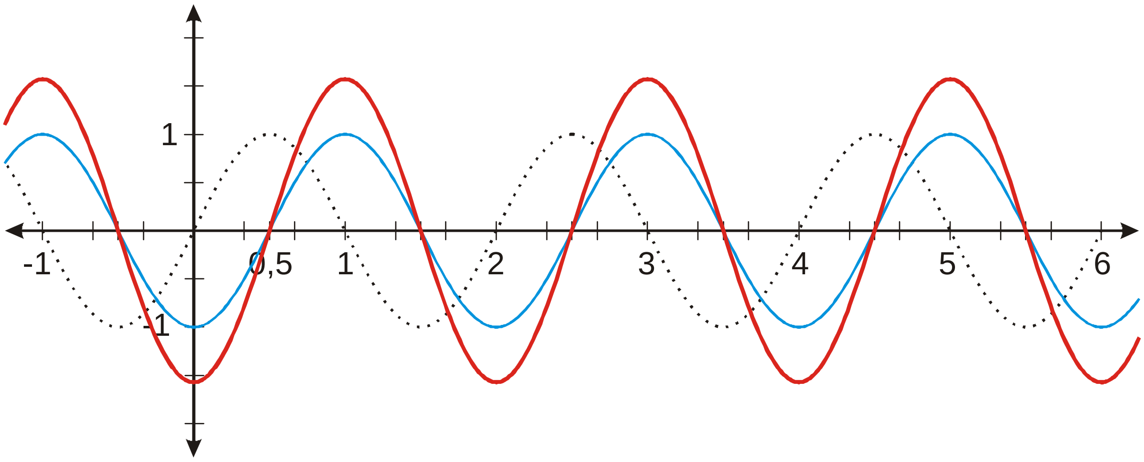
Nejdříve určíme periodu funkce $y=\sin(\pi x)$. Porovnáváme:

- funkce $\sin x$ má nejmenší periodu 2π,
- funkce $\sin(2x)$ má nejmenší periodu π,
- funkce $\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ má nejmenší periodu 6π,

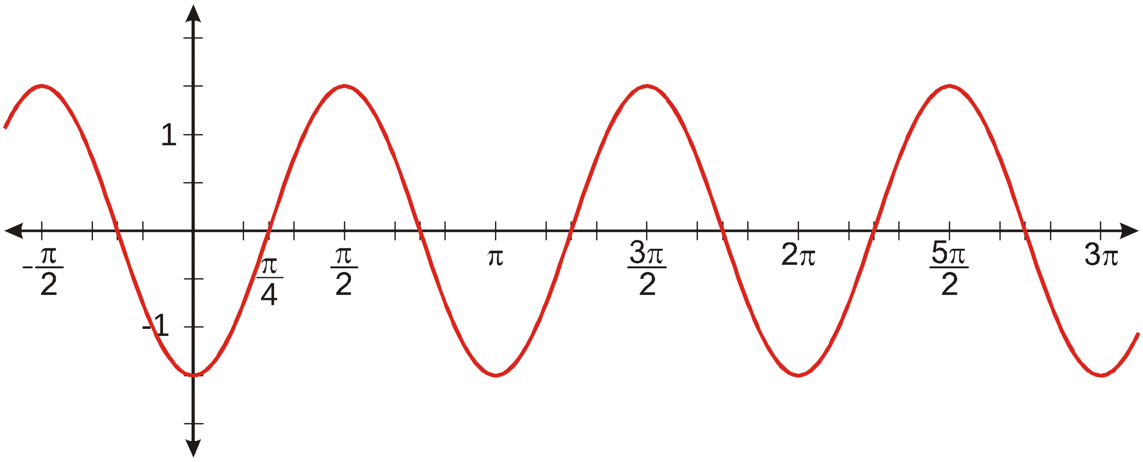
$\Rightarrow$ zřejmě: funkce $\sin(bx)$ má nejmenší periodu $\frac{2\pi}{|b|}$.

Funkce $y=\sin(\pi x)$ má nejmenší periodu $\frac{2\pi}{\pi}=2$ $\Rightarrow$ x-vou osu budeme popisovat normálně, ne pomocí násobků π.

Upravíme předpis funkce: $y=\frac{\pi}{2}\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\left[\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$. $\Rightarrow$ Graf bude posunutý o $\frac{1}{2}$ doprava s nejmenší periodou 2. Vynásobením $\frac{\pi}{2}\doteq 1,57$ se zvětší „roztažení“ funkce na ose y.



Př. 6: Najdi předpis funkce jejíž graf je na obrázku. Předpokládej, že jde o funkci odvozenou od funkce: a) $\sin x$ b) $\cos x$.



a) funkce odvozená z funkce $\sin x$

Hledáme vyjádření ve tvaru $y=a\sin\left[b\left(x-c\right)\right]+d$:

- funkce „obíhá“ okolo přímky $y=0 \Rightarrow d=0$,
- platí $H\left(f\right)=\left\langle -1,5;1,5\right\rangle \Rightarrow a=1,5$,
- nejmenší perioda funkce se rovná $\pi \Rightarrow b=2$,
- funkce „začíná“ v bodě $x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow c=\frac{\pi}{4}$.

Hledaná funkce má předpis $y=1,5\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

b) funkce odvozená z funkce $\cos x$

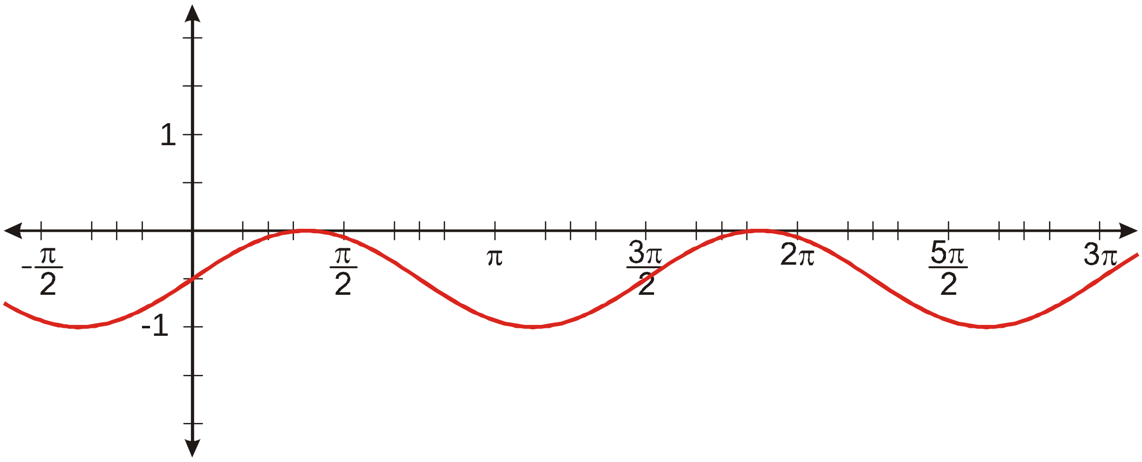
Hledáme vyjádření ve tvaru $y=a\cos\left[b\left(x-c\right)\right]+d$:

- funkce „obíhá“ okolo přímky $y=0 \Rightarrow d=0$,

- platí $H(f)=\langle -1,5;1,5\rangle \Rightarrow a=1,5$,
- nejmenší perioda funkce se rovná $\pi \Rightarrow b=2$,
- funkce „začíná“ v bodě $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow c=\frac{\pi}{2}$.

Hledaná funkce má předpis $y=1,5\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Př. 7: Najdi předpis funkce jejíž graf je na obrázku. Předpokládej, že jde o funkci odvozenou z funkce: a) $\sin x$ b) $\cos x$.



a) funkce odvozená z funkce $\sin x$
Hledáme vyjádření ve tvaru $y=a\sin\left[b(x-c)\right]+d$:

- funkce „obíhá“ okolo přímky $y=-0,5 \Rightarrow d=-0,5$,
- platí $H(f)=\langle -1;0\rangle \Rightarrow a=0,5$,
- nejmenší perioda funkce se rovná $\frac{3}{2}\pi=\frac{2\pi}{b} \Rightarrow b=\frac{4}{3}$ (v intervalu $\langle 0;3\pi\rangle$ se funkce zopakuje dvakrát,
- funkce „začíná“ v bodě $x=0 \Rightarrow c=0$.

Hledaná funkce má předpis $y=0,5\sin\left[\frac{4}{3}x\right]-0,5$.

b) funkce odvozená z funkce $\cos x$
Hledáme vyjádření ve tvaru $y=a\cos\left[b(x-c)\right]+d$:

- funkce „obíhá“ okolo přímky $y=-0,5 \Rightarrow d=-0,5$,
- platí $H(f)=\langle -1;0\rangle \Rightarrow a=0,5$,
- nejmenší perioda funkce se rovná $\frac{3}{2}\pi=\frac{2\pi}{b} \Rightarrow b=\frac{4}{3}$ (v intervalu $\langle 0;3\pi\rangle$ se funkce zopakuje dvakrát,
- „začátek“ funkce není příliš zřejmý $\Rightarrow$ využijeme rovnost $\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

  $\sin\left(\frac{4}{3}x\right)=\cos\left(\frac{4}{3}x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left[\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{8}\pi\right)\right]$.

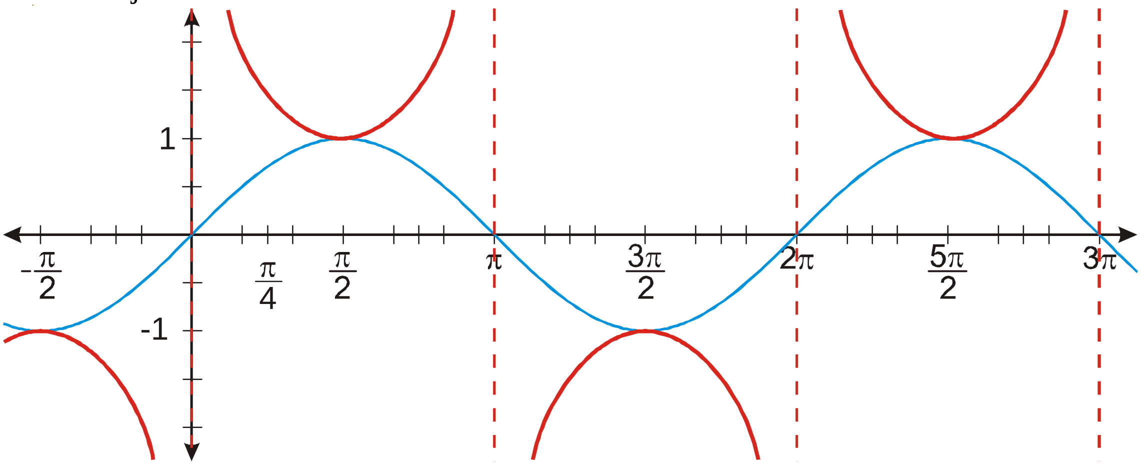
Hledaná funkce má předpis $y = 0,5\cos\left[\frac{4}{3}\left(x - \frac{3}{8}\pi\right)\right] - 0,5$.

Př. 8: Načrtni grafy funkcí: a) $y = \sin^{-1} x$ b) $y = \sin^2 x$ c) $y = \sin x + \cos x$.
Svůj odhad ověř pomocí počítačového programu.

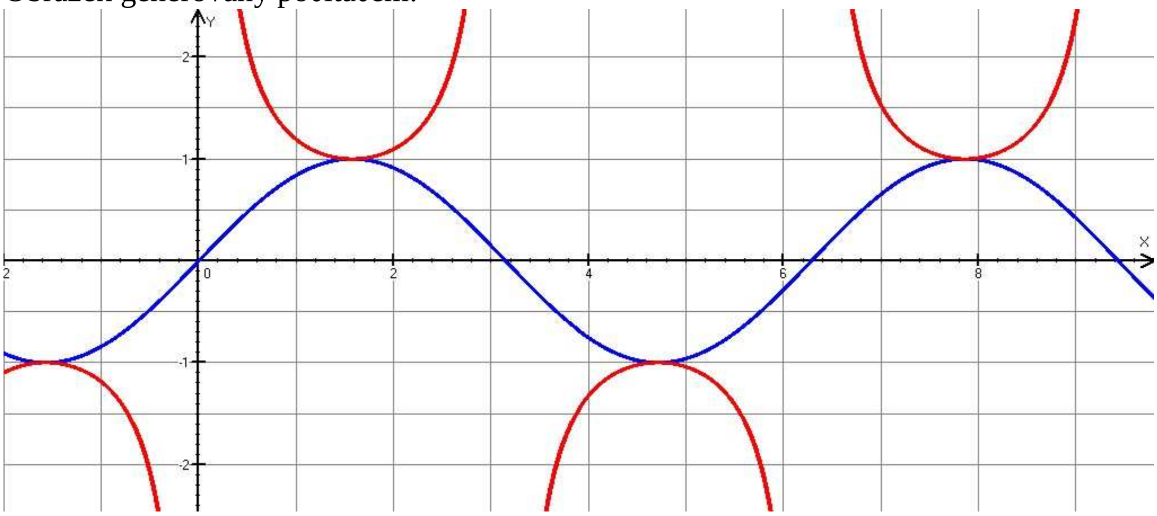
a) $y = \sin^{-1} x$

Hledáme převrácené hodnoty k hodnotám funkce $y = \sin x$ $\Rightarrow$

- v bodech, kde jsou hodnoty funkce $y = \sin x$ nulové, funkce $y = \sin^{-1} x$ hodnoty nemá,
- v bodech, kde má funkce $y = \sin x$ hodnotu 1 nebo –1, je hodnota funkce $y = \sin^{-1} x$ stejná.



Obrázek generovaný počítačem:

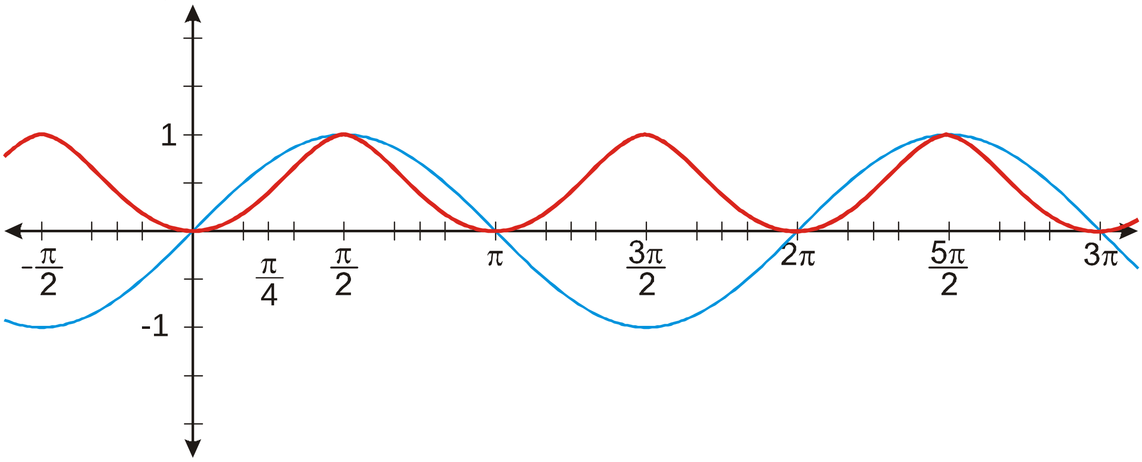


b) $y = \sin^2 x$

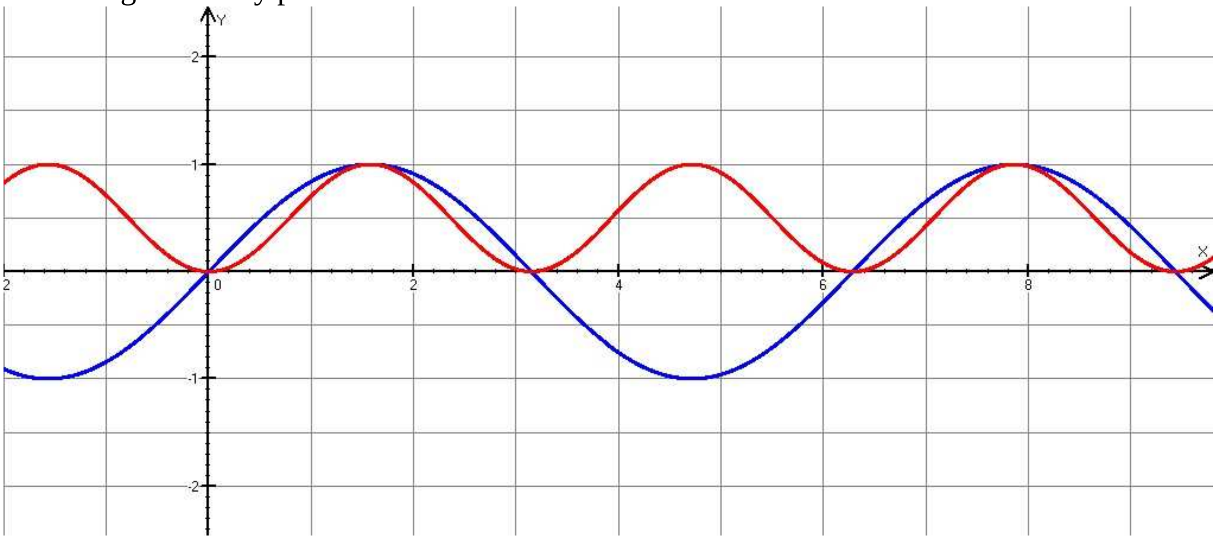
Hledáme druhé mocniny hodnot funkce $y = \sin x$ $\Rightarrow$

- všechny hodnoty budou kladné,
- v bodech, kde jsou hodnoty funkce $y = \sin x$ nulové, je hodnota funkce $y = \sin^2 x$ také nulová,
- v bodech, kde má funkce $y = \sin x$ hodnotu 1 nebo –1, je hodnota funkce $y = \sin^2 x$ rovna jedné,

- ve všech ostatních bodech je absolutní hodnota hodnoty funkce $y = \sin^2 x$ menší než absolutní hodnota funkce $y = \sin x$ (umocňujeme čísla s absolutní hodnotou menší než 1).



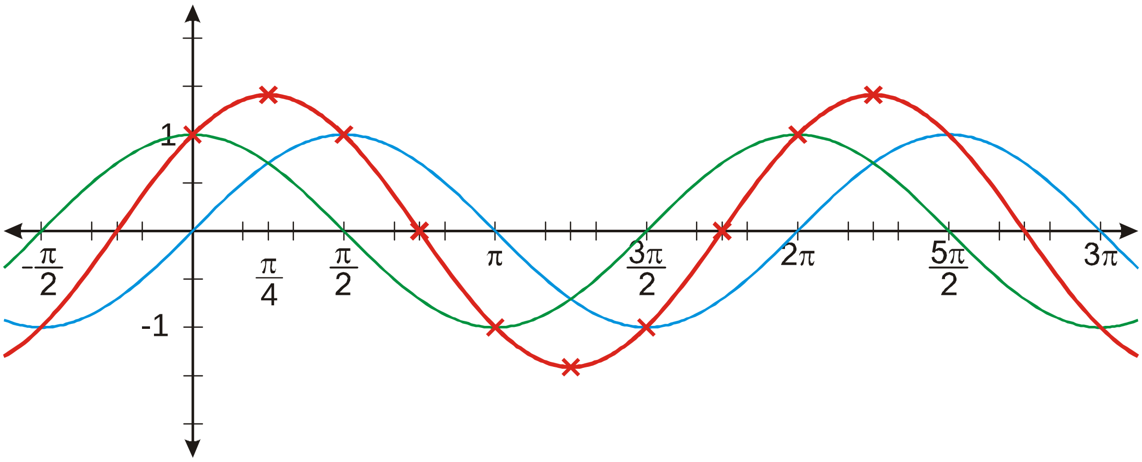
Obrázek generovaný počítačem:



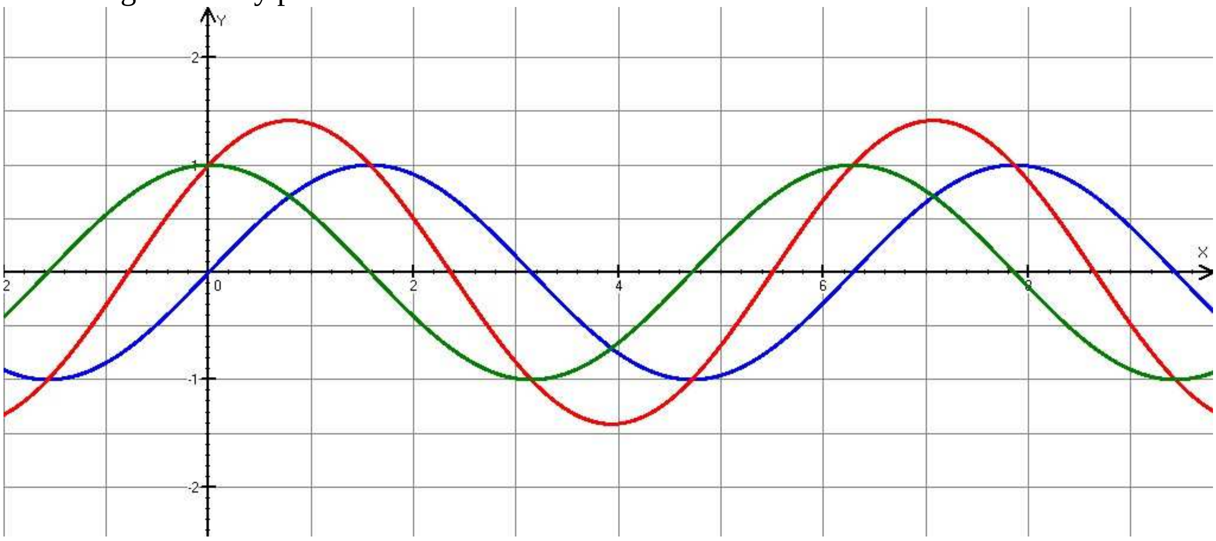
c) $y = \sin x + \cos x$

Nakreslíme grafy obou funkcí a sčítáme jejich hodnoty $\Rightarrow$

- v bodech, kde jsou hodnoty funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$ stejné, má funkce $y = \sin x + \cos x$ maximum (nebo minimum) (strmost obou funkcí klesá s jejich absolutní hodnotou),
- v bodech, kde má funkce $y = \sin x$ nebo $y = \cos x$ hodnotu 0, je hodnota funkce $y = \sin x + \cos x$ rovna hodnotě druhé funkce,
- v bodech, kde jsou hodnoty funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$ opačné, má funkce $y = \sin x + \cos x$ hodnotu nula.



Obrázek generovaný počítačem:



Dodatek: Oba grafy vygenerované počítačem v bodech b) a c) jsou nápadně podobné funkcím $\sin x$ a $\cos x$. Nejde o náhodu, opravdu jde o funkce odvozené z funkce $y = \sin x$ $\Rightarrow$ goniometrické funkce mají zřejmě mnoho speciálních vlastností.

Př. 9: Petáková:
strana 41/cvičení 7 h_1, h_2, h_3 h_5

Shrnutí: