

## 4.2.10 Grafy funkcí odvozených z funkcí sinus a cosinus I

**Předpoklady:** 4210

**Př. 1:** Nakresli graf funkce  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ .

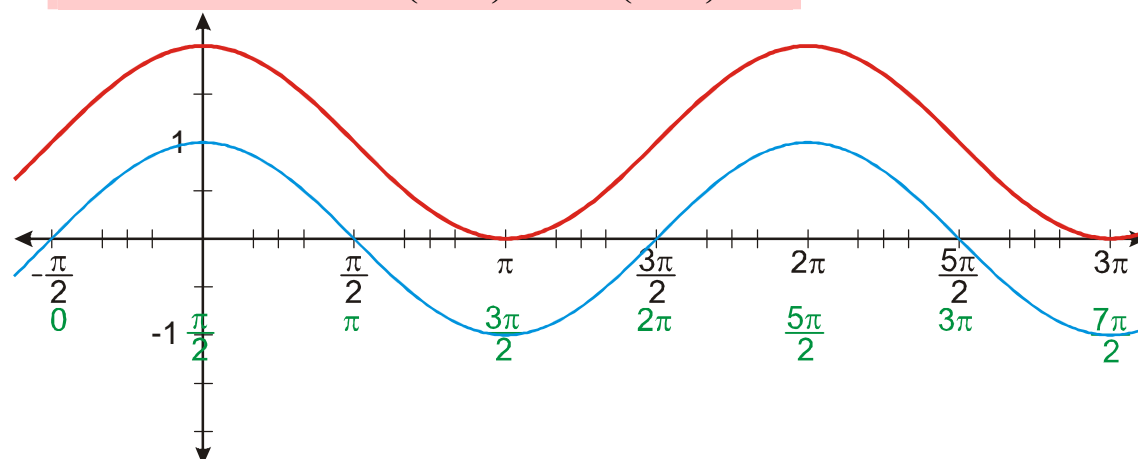
Platí:  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $x + \frac{\pi}{2}$ .

Nakreslíme funkci  $y = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Nakreslíme funkci  $y = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ .



**Dodatek:** Funkce, kterou jsme nakreslili, se dá popsat nejen jako  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ , ale také jako  $y = \cos x + 1$ .

### Nepříjemná zjištění:

- Přečíslovávání osy  $x$  je kvůli zlomkům poměrně pracné.
- Na rozdíl od všech předchozích funkcí „neprobíhá“ vše důležité v okolí nuly na ose  $x$  (kde nám stačilo přečíslovávat dosud), ale kvůli periodicitě funkcí sinus a cosinus se grafy protínají s osou  $x$  v celém kresleném intervalu a proto bychom měli přečíslovávat celou osu  $x$ .

⇒

### Dvě změny v našem systému kreslení grafů:

- Nakreslíme pomocný graf původní funkce. Graf původní funkce kreslíme pomocí původních souřadnic, a proto nepotřebujeme přečíslovanou osu. Tvar grafu původní funkce dobře známe a proto ho dokážeme nakreslit rychle.

- Číslo uvnitř předpisu funkce (například  $\frac{\pi}{2}$  u funkce  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ ) budeme vnímat jako číslo, které určuje posunutí po ose  $x$ . Pomocí tohoto čísla snadno najdeme počáteční bod, ze kterého začneme kreslit křivku, která bude kopírovat graf původní funkce.

Například u funkce  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$  můžeme postupovat takto:

Platí:  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ .

- Nakreslíme graf funkce  $y = \sin x$ .
- Číslo  $\frac{\pi}{2}$  určuje změnu  $x$  před výpočtem hodnot funkce a tedy posunutí na ose  $x$ . Sinusoida „začíná“ v místě, kdy do funkce sinus dosazujeme 0  $\Rightarrow$  kdy platí

$$x + \frac{\pi}{2} = 0?$$

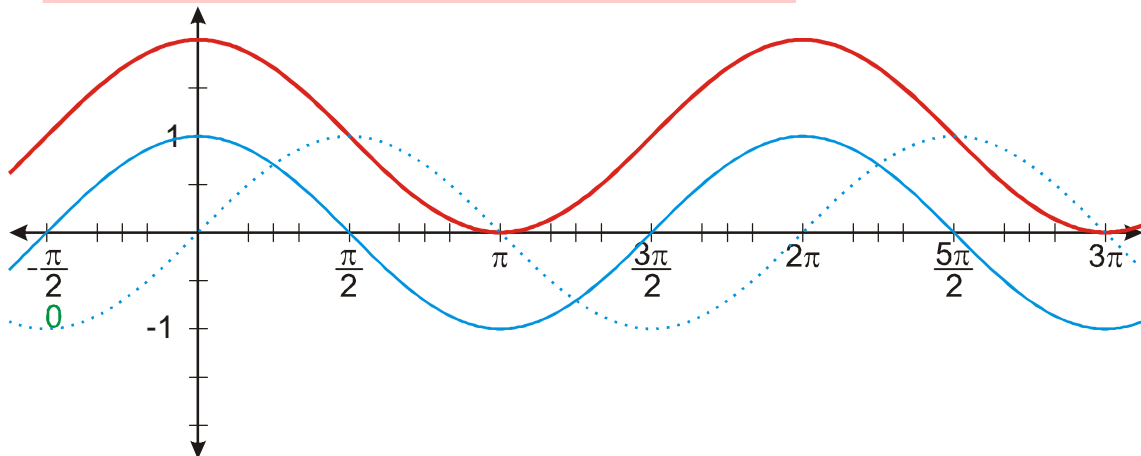
$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{funkce „začíná“ v bodě } x = -\frac{\pi}{2}.$$

Zvolíme  $x$  a nakreslíme graf  $y = \sin x$ .

Vypočteme posunutí a nakreslíme počáteční bod.

Nakreslíme funkci  $y = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Nakreslíme funkci  $y = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ .



**Př. 2:** Nakresli graf funkce  $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ .

Platí:  $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ . Číslo  $-\frac{\pi}{6}$  určuje změnu  $x$  před výpočtem hodnot funkce a tedy posunutí na ose  $x$ .

Sinusoida „začíná“ v místě, kdy do funkce sinus dosazujeme 0.  $\Rightarrow$  Kdy platí  $x - \frac{\pi}{6} = 0$ ?

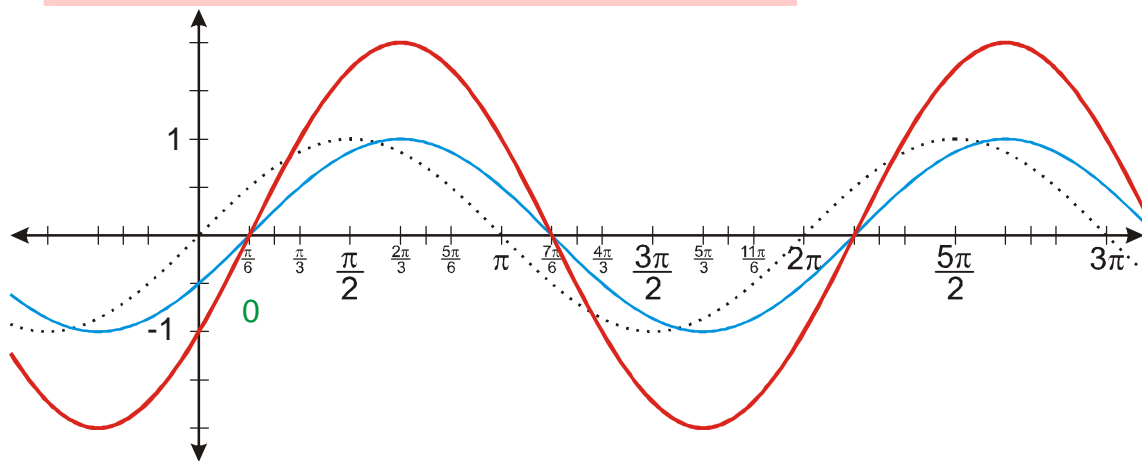
$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{funkce „začíná“ v bodě } x = \frac{\pi}{6}.$$

Zvolíme  $x$  a nakreslíme graf  $y = \sin x$ .

Vypočteme posunutí a nakreslíme počáteční bod.

$$\text{Nakreslíme funkci } y = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Nakreslíme funkci } y = 2f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$



**Př. 3:** Nakresli graf funkce  $y = \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right|$ .

Platí:  $y = \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right| = \left| f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right|$ . Číslo  $-\frac{\pi}{3}$  určuje změnu  $x$  před výpočtem hodnot funkce a tedy posunutí na ose  $x$ .

Sinusoida „začíná“ v místě, kdy do funkce sinus dosazujeme 0.  $\Rightarrow$  Kdy platí  $x - \frac{\pi}{3} = 0$ ?

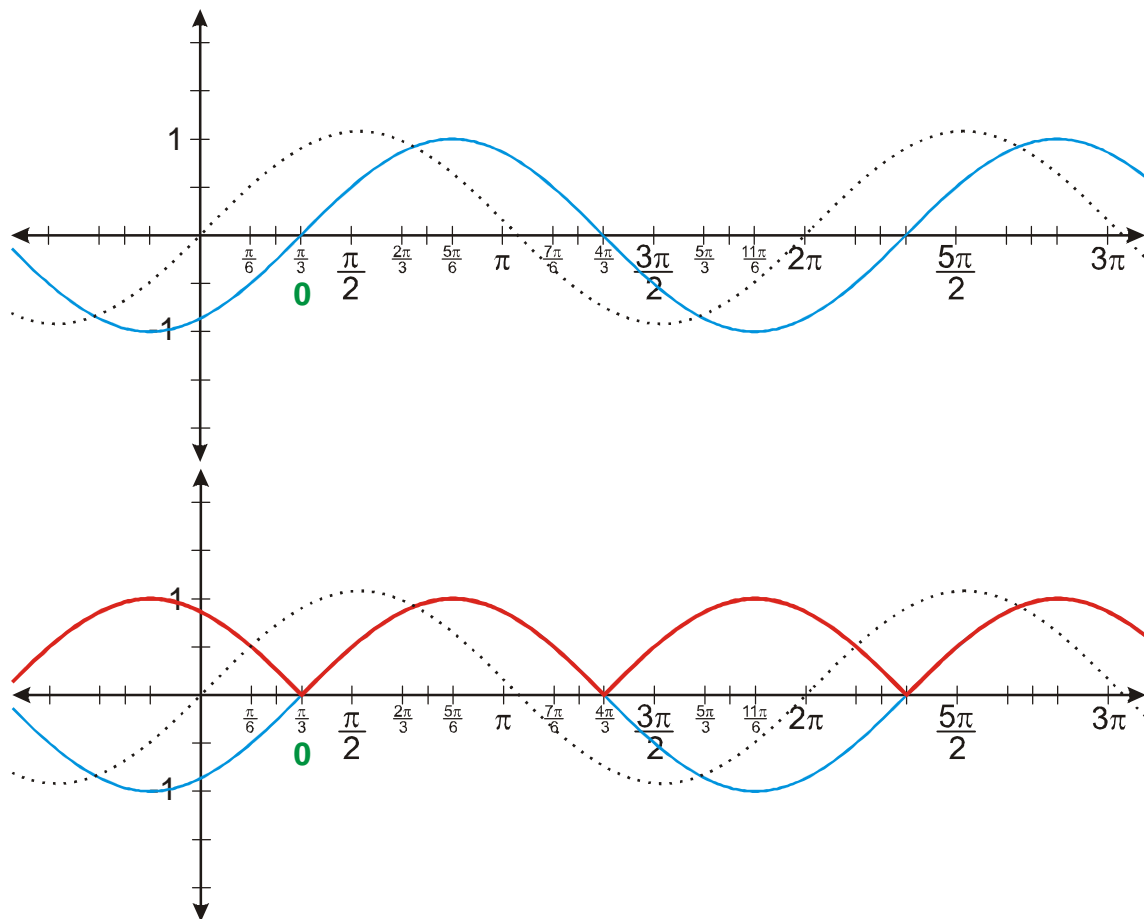
$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{funkce „začíná“ v bodě } x = \frac{\pi}{3}.$$

Zvolíme  $x$  a nakreslíme graf funkce  $y = \sin x$ .

Vypočteme posunutí a nakreslíme počáteční bod.

$$\text{Nakreslíme funkci } y = f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{Nakreslíme funkci } y = \left| f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right| = \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right|.$$



**Př. 4:** Nakresli graf funkce  $y = 0,5 \cos(x-1)$ .

Platí:  $y = 0,5 \cos(x-1) = 0,5 f(x-1)$ . Číslo  $-1$  určuje změnu  $x$  před výpočtem hodnot funkce a tedy posunutí na ose  $x$ .

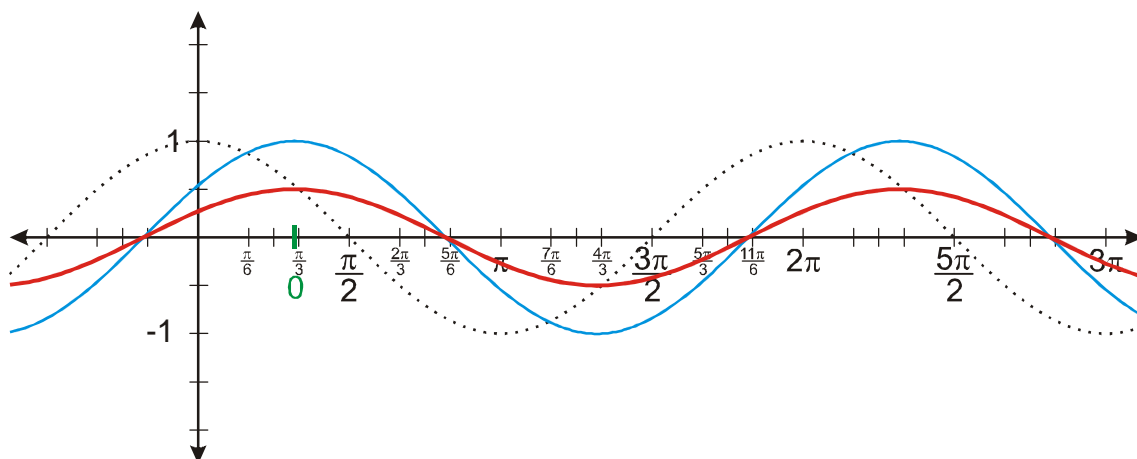
Cosinusoida „začíná“ v místě, kdy do funkce cosinus dosazujeme 0.  $\Rightarrow$  Kdy platí  $x-1=0$ ?  
 $x=1 \Rightarrow$  funkce „začíná“ v bodě  $x=1$ .

Zvolíme  $x$  a nakreslíme  $y = \cos x$ .

Vypočteme posunutí a nakreslíme počáteční bod.

Nakreslíme funkci  $y = f(x-1) = \cos(x-1)$ .

Nakreslíme funkci  $y = \left| f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right| = \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right|$ .



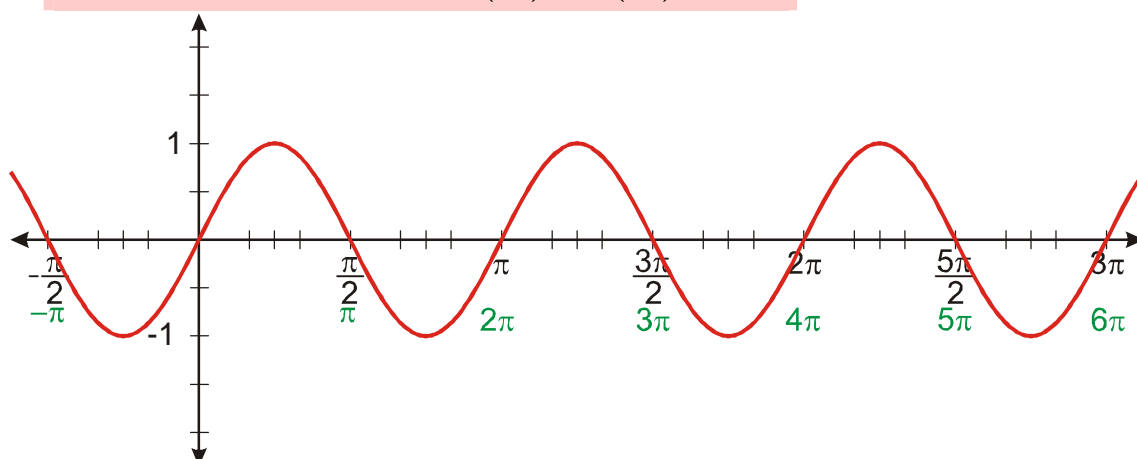
**Př. 5:** Nakresli graf funkce  $y = \sin(2x)$ . Urči její nejmenší periodu.

Platí:  $y = \sin(2x) = f(2x)$ .

Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $2x$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(2x) = \sin(2x)$ .



Nejmenší periodou funkce je číslo  $\pi$ .

**Pedagogická poznámka:** Některým studentům je třeba zdůraznit, že periodu určujeme samozřejmě z původních hodnot proměnné  $x$  a ne z hodnot, které získáme na ose  $x$  přečíslováním.

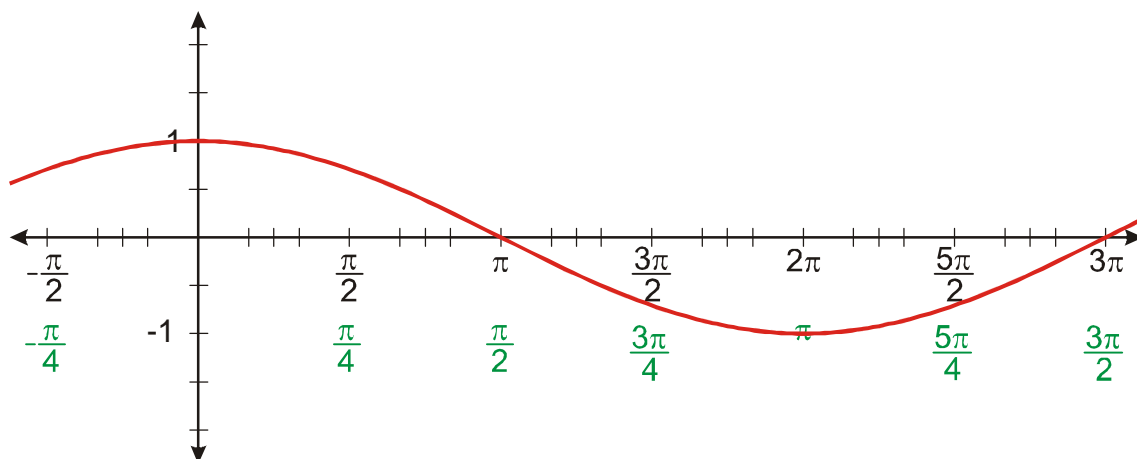
**Př. 6:** Nakresli graf funkce  $y = \cos(0,5x)$ . Urči její nejmenší periodu.

Platí:  $y = \cos(0,5x) = f(0,5x)$ .

Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $0,5x$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(0,5x) = \cos(0,5x)$ .



Nejmenší periodou funkce je číslo  $4\pi$ .

**Př. 7:** Rozhodni jaký vliv na graf funkce  $y = \sin(ax)$  má hodnota čísla  $a$ . Jak mění hodnota čísla  $a$  nejmenší periodu funkce?

Z předchozích ukázek je zřejmé, že hodnota čísla  $a$  určuje „natažení grafu“ ve vodorovném směru. Nejmenší perioda funkce se rovná  $\frac{2\pi}{|a|}$ .

**Př. 8:** Nakresli graf funkce  $y = \sin|3x|$ .

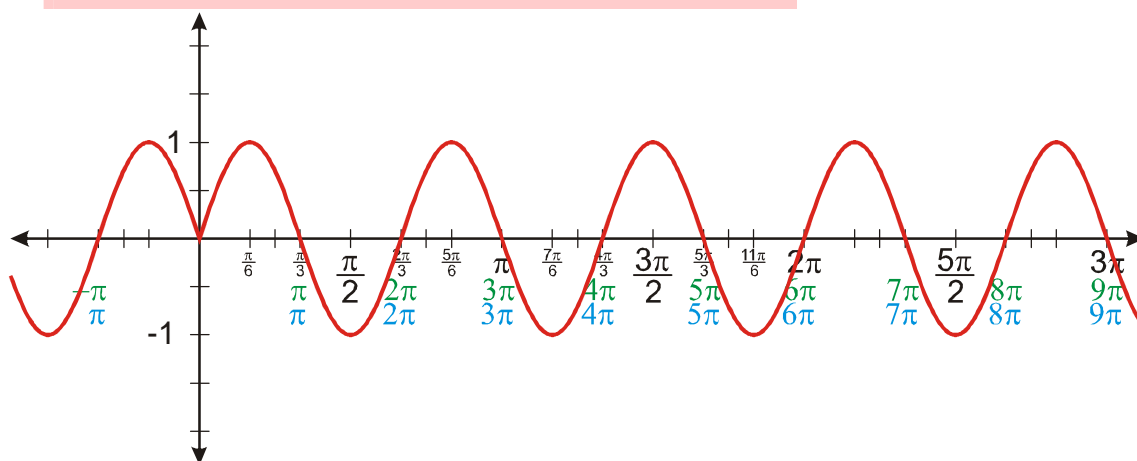
Platí:  $y = \sin|3x| = f(|3x|)$ .

Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $3x$ .

Vypočteme  $|3x|$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(|3x|) = \sin|3x|$ .



**Př. 9:** Petáková:

strana 41/cvičení 15  $f_3, f_6, f_8$

strana 41/cvičení 16  $g_2, g_6, g_9$

**Shrnutí:** Při kreslení grafů funkcí odvozených z funkcí sinus a cosinu v některých případech nepřepisujeme osu a místo toho využíváme původní graf a jeho posunutí.