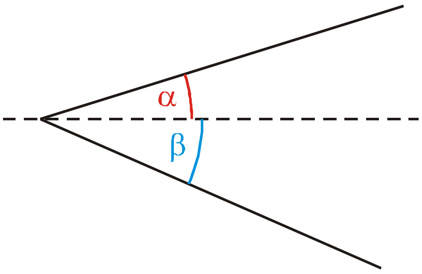
4.2.2 Slovní úlohy na využití goniometrických funkcí ostrého úhlu

Předpoklady: 4201

Nejdříve dva termíny:

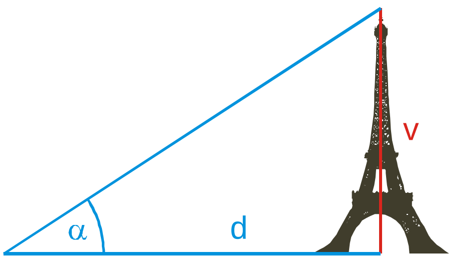
- **výškový úhel (na obrázku α):** Úhel ve svislé rovině, který udává odchylku přímky spojující pozorovatele s pozorovaným předmětem od vodorovné roviny. Koukáme nahoru.
- **hloubkový úhel (na obrázku β):** Úhel ve svislé rovině, který udává odchylku přímky spojující pozorovatele s pozorovaným předmětem od vodorovné roviny. Koukáme dolů.



Pedagogická poznámka: Velký význam při řešení následujících příkladů mají správně nakreslené obrázky. Je třeba hlídat, aby zadání odpovídaly (pravé úhly jsou opravdu pravé), případně zvýrazňovaly jeho podstatné rysy (například vzájemné velikosti stran).

Pedagogická poznámka: Zadání většinou záměrně neobsahují obrázky. Největším problémem je pro většinu studentů právě jejich nakreslení.

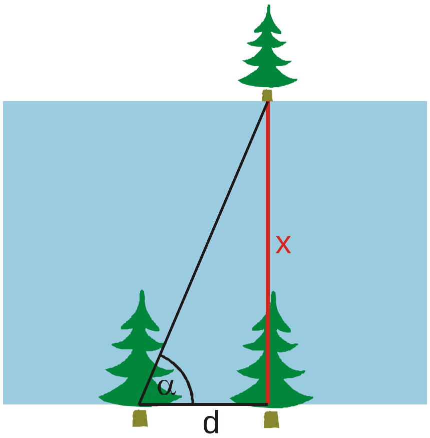
Př. 1: Vrchol Eiffelovy věže je vidět ze vzdálenosti 500 m pod výškovým úhlem $32°57'$. Urči výšku věže.



Z obrázku vidíme, že platí: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v}{d} \Rightarrow v = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot d = \mathrm{tg}\,32°57' \cdot 500\,\mathrm{m} = 324\,\mathrm{m}$

Eiffelova věž je vysoká 324 metrů.

Př. 2: Na břehu řeky jsou dva stromy vzdálené od sebe 50 m. Na protějším břehu stojí další strom tak, že spolu s předchozími tvoří pravoúhlý trojúhelník, jehož druhou odvěsnou je šířka řeky. Urči šířku řeky, pokud přepona stromového trojúhelníku svírá s břehem úhel $67°$.

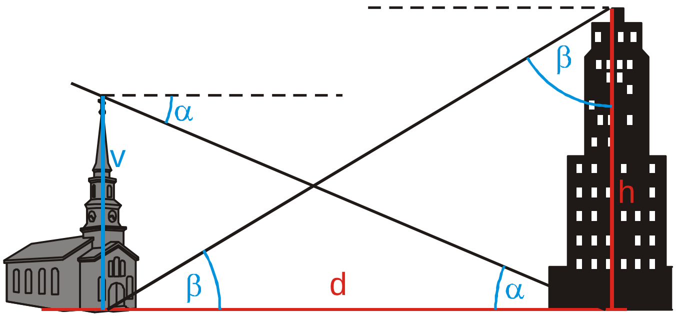


Z obrázku vidíme, že platí: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{x}{d} \Rightarrow x = \mathrm{tg}\alpha \cdot d = \mathrm{tg}67° \cdot 50\,\mathrm{m} = 118\,\mathrm{m}$

Řeka je široká 118 metrů.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají trochu problémy s nakreslením obrázku. Nejčastěji špatně zakreslí vyznačený úhel (zřejmě z podvědomé snahy dosáhnout toho, aby řeka byla užší než vzdálenost naměřená na jejím břehu).

Př. 3: Na opačných koncích náměstí stojí proti sobě kostelní a radniční věž. Kostelní věž je vysoká 45 m a z jejího vrcholu je vidět pata radniční věže pod hloubkovým úhlem $\alpha = 23°$. Pata kostelní věže je z vrcholu radniční věže vidět pod hloubkovým úhlem $\beta = 31°$. Bez výpočtu rozhodni, která z věží je vyšší. Urči výšku radniční věže. Jak dlouhé je náměstí?

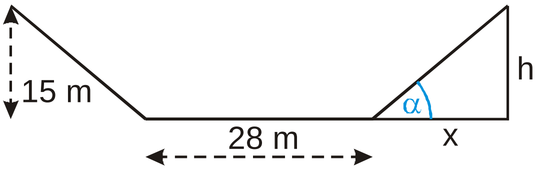


Z obrázku je zřejmé, že radniční věž musí být vyšší.

Nejdříve spočteme délku náměstí: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{v}{d} \Rightarrow d = \frac{v}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{45}{\mathrm{tg}23°}\,\mathrm{m} = 106\,\mathrm{m}$

Výška radnice: $\mathrm{tg}\beta = \frac{h}{d} \Rightarrow h = \mathrm{tg}\beta \cdot d = tg31° \cdot 106\,\mathrm{m} = 63{,}7\,\mathrm{m}$

Př. 4: Při stavbě dálnice je nutné vyhloubit do hřebenu zářez hluboký 15 m. Svah zářezu má mít maximální sklon $40°$. Urči, v jaké šíři je třeba odstranit ornici z vrcholu kopce, pokud má budovaná komunikace mít šířku 28 m.



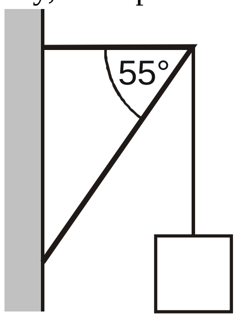
Musíme spočítat vzdálenost vyznačenou na obrázku jako *x*.

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{15}{\mathrm{tg}\,40°}\,\mathrm{m} = 18\,\mathrm{m}$

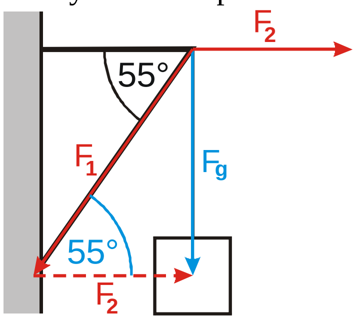
Celková šíře horní hrany zářezu $x + 28 + x = 18 + 28 + 18\,\mathrm{m} = 64\,\mathrm{m}$

Na vrcholu kopce je třeba odstranit ornici v šíři 64 m.

Př. 5: Na konzoly s vyznačeným úhlem $55°$ je zavěšen náklad o hmotnosti 120 kg. Urči síly, které působí na obě příčky konzoly.



Zakreslíme do obrázku sílu $F_g = 1200\,\mathrm{N}$, kterou působí náklad na konzolu, a rozložíme ji na složky ve směru příček.



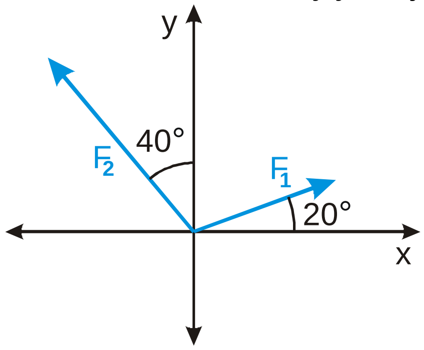
$\sin\alpha = \frac{F_g}{F_1} \Rightarrow F_1 = \frac{F_g}{\sin\alpha} = \frac{1200}{\sin 55°}\,\mathrm{N} = 1460\,\mathrm{N}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_g}{F_2} \Rightarrow F_2 = \frac{F_g}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{1200}{\mathrm{tg}\,55°}\,\mathrm{N} = 840\,\mathrm{N}$

Zavěšený náklad bude na příčky konzoly působit silami 1460 N a 840 N.

Pedagogická poznámka: S rozkladem síly F_g bude některým studentům určitě potřeba pomoci. Zbytek příkladu pak dořeší sami.

Př. 6: V soustavě souřadnic jsou zakresleny dvě síly $F_1 = 20\,\mathrm{N}$, $F_2 = 30\,\mathrm{N}$. Rozlož obě síly do složek. Urči velikost jejich výslednice a úhel, který výslednice svírá s osou *x*.



Rozklad síly F_1:

- $\cos\alpha = \frac{F_{1x}}{F_1} \Rightarrow F_{1x} = \cos 20° \cdot 20 = 18,79\,\mathrm{N}$
- $\sin\alpha = \frac{F_{1y}}{F_1} \Rightarrow F_{1y} = \sin 20° \cdot 20 = 6,84\,\mathrm{N}$

Rozklad síly F_2:

- $\sin\beta = \frac{F_{2x}}{F_2} \Rightarrow F_{2x} = \sin 40° \cdot 30 = 19,28\,\mathrm{N}$
- $\cos\beta = \frac{F_{2y}}{F_2} \Rightarrow F_{1x} = \cos 40° \cdot 30 = 22,98\,\mathrm{N}$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti přehlédnou, že síla F_2 svírá úhel $40°$ se svislou osou a je nutné použít jiné goniometrické funkce než u síly F_1.

Shrnutí: Pomocí goniometrických funkcí můžeme řešit mnoho situací z reálného života, ve kterých dokážeme najít pravoúhlý trojúhelník.