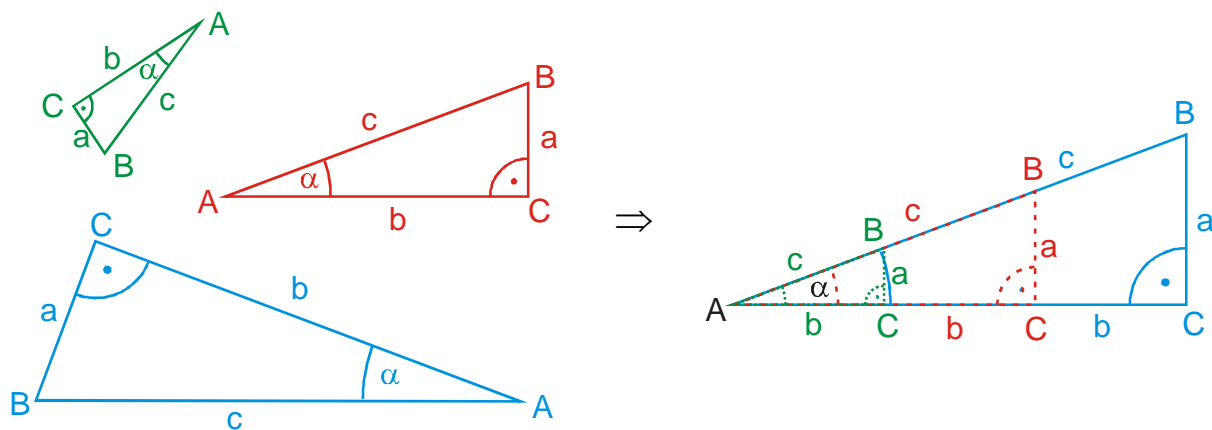


## 4.2.1 Goniometrické funkce ostrého úhlu

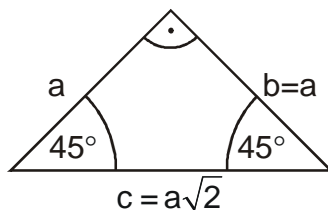


### 1. rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník

Délka přepony pomocí Pythagorovy věty:

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$



**Př. 1:** Urči pomocí rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel  $x = 45^\circ$ .

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{a}{a} = 1$$

### 2. rovnostranný trojúhelník

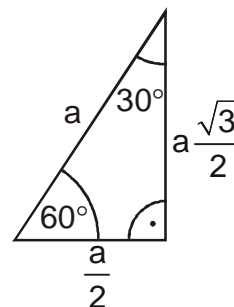
Výška na libovolnou stranu rozdělí trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky s úhly  $30^\circ$  a  $60^\circ$ .

Délka delší odvěsny pomocí Pythagorovy věty:

$$C^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow B^2 = C^2 - A^2$$

$$B^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$B = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = a\sqrt{\frac{3}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$



**Př. 2:** Urči pomocí poloviny rovnostranného trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel  $x = 60^\circ$ .

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

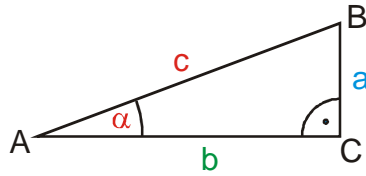
**Př. 3:** Urči pomocí poloviny rovnostranného trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel  $x = 30^\circ$ .

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{\frac{a}{2}}{a \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{a \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$



$$\sin x = \frac{a}{c} \Rightarrow \text{s rostoucím úhlem } \alpha \text{ se hodnota } \sin x \text{ zvětšuje}$$

$$\cos x = \frac{b}{c} \Rightarrow \text{s rostoucím úhlem } \alpha \text{ se hodnota } \cos x$$

zmenšuje

Úhel [°]	0	30	45	60	90
$\sin(x)$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(x)$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$
$\operatorname{tg}(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\operatorname{cotg}(x)$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

**Př. 4:** Pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s pravým úhlem  $\gamma$  a s úhlem  $\alpha = 30^\circ$  má velikost přepony  $c = 4 \text{ cm}$ . Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pro  $\beta$  platí:  $\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

Pro stranu  $a$ :  $\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \sin \alpha \cdot c = \sin 30^\circ \cdot 4 = 2 \text{ cm}$ .

Pro stranu  $b$ :  $\cos \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \cos \alpha \cdot c = \cos 30^\circ \cdot 4 = 3,46 \text{ cm}$ .

**Př. 5:** Pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s pravým úhlem  $\gamma$  a s úhlem  $\alpha = 40^\circ$  má velikost odvěsny  $a = 9 \text{ cm}$ . Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pro  $\beta$  platí:  $\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ .

Pro stranu  $c$ :  $\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{9}{\sin 40^\circ} = 14,00 \text{ cm}$ .

Pro stranu  $b$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{9}{\operatorname{tg} 40^\circ} = 10,73 \text{ cm}$ .

**Př. 6:** Pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s pravým úhlem  $\beta$  a s úhlem  $\alpha = 25^\circ$  má velikost odvěsny  $a = 10 \text{ cm}$ . Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pravým úhlem v trojúhelníku je  $\beta \Rightarrow$  goniometrické funkce musíme používat ve tvaru

$$\sin \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} \text{ (platí vždy) ne ve tvaru } \sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ (platí pouze u trojúhelníků s pravým}$$

úhlem  $\gamma$ ).

Pro  $\gamma$  platí:  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 25^\circ - 90^\circ = 65^\circ$ .

Pro stranu  $b$ :  $\sin \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin 25^\circ} = 23,66 \text{ cm}$ .

Pro stranu  $c$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{10}{\operatorname{tg} 25^\circ} = 21,45 \text{ cm}$ .