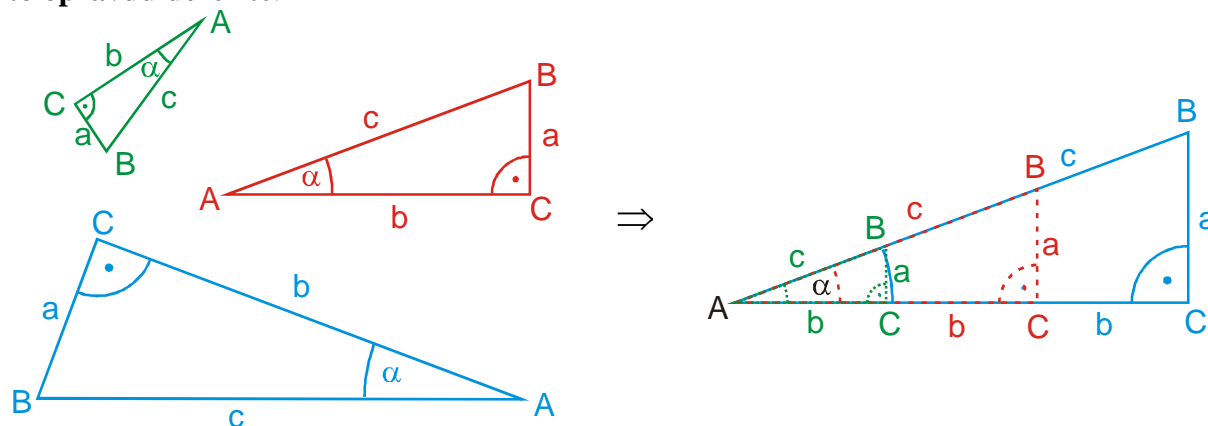


4.2.1 Goniometrické funkce ostrého úhlu

Předpoklady: 1107

Dnešní látku opakujeme už potřetí (poprvé na začátku matematiky, podruhé ve fyzice) \Rightarrow **je to opravdu důležité.**



Všechny pravoúhlé trojúhelníky s úhlem α mají dva stejné úhly (α a 90°) \Rightarrow mají stejný i třetí úhel (je to zbytek do 180°) \Rightarrow mají stejný tvar \Rightarrow jsou si podobné \Rightarrow mají stejný poměr odpovídajících si stran \Rightarrow poměr $\frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c}$ je stejné číslo u všech pravoúhlých trojúhelníků s úhlem α .

Když si vybereme úhel α , tak už je jasné kolik vyjde v pravoúhlém trojúhelníku s tímto úhlem poměr $\frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c} \Rightarrow$ **poměr** $\frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c}$ **je číslo jednoznačně určené**

velikostí úhlu α \Rightarrow poměr $\frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c}$ můžeme považovat za hodnotu nějaké funkce vyrobenou z čísla α .

Funkci nazveme sinus α ($\sin \alpha$) $\Rightarrow y = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c} = \sin \alpha$.

Za hodnotu funkce $y = \sin x$ pro $x \in (0^\circ; 90^\circ)$ považuje hodnotu zlomku $\frac{a}{c}$, kde a je velikost protilehlé odvěsny a c je velikost přepony v libovolném pravoúhlém trojúhelníku s úhlem x .

Podobně můžeme využít i další poměry stran v pravoúhlém trojúhelníku s úhlem x :

$$\cos x = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{b}{c} \quad \text{tg } \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{a}{b} \quad \text{cotg } \alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{b}{a}$$

Vzorce pro goniometrické funkce:

- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ Proč?

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

- $\operatorname{tg} \alpha = (\operatorname{cotg} \alpha)^{-1}$ Proč?

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha} = (\operatorname{cotg} \alpha)^{-1}$$

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ Proč?

Pythagorova věta: $a^2 + b^2 = c^2 \quad / : c^2$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

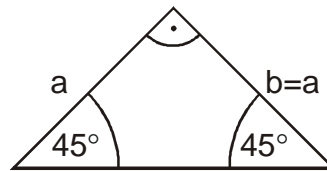
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Jak určíme hodnoty výpočtem?

Jde to pro vhodné úhly v trojúhelnících, kde známe délky stran.

1. rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník

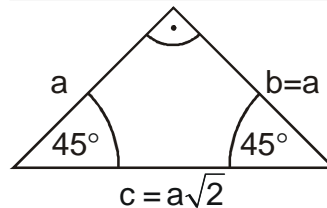
Ramena jsou stejné dlouhá.



Délka přepony pomocí Pythagorovy věty:

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$



Př. 1: Urči pomocí rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel $x = 45^\circ$.

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

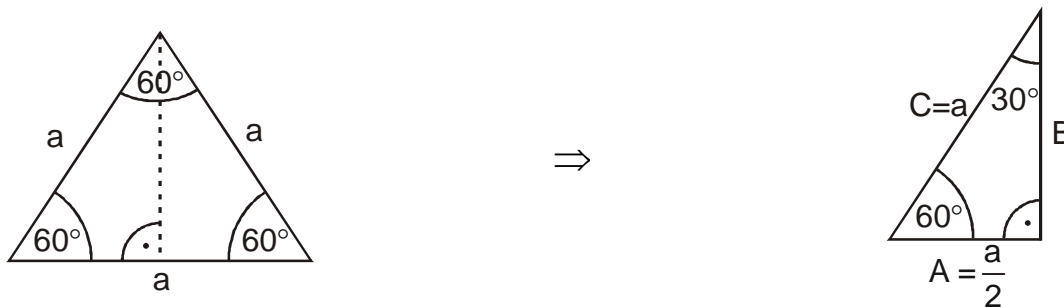
$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přílehlá}} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{přílehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{\text{přílehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{a}{a} = 1$$

2. rovnostranný trojúhelník

Výška na libovolnou stranu rozdělí trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky s úhly 30° a 60° .

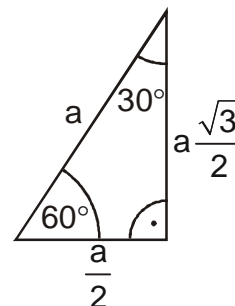


Délka delší odvěsny pomocí Pythagorovy věty:

$$C^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow B^2 = C^2 - A^2$$

$$B^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$B = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = a\sqrt{\frac{3}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Př. 2: Urči pomocí poloviny rovnostranného trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel $x = 60^\circ$.

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{cotg } 60^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Př. 3: Urči pomocí poloviny rovnostranného trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel $x = 30^\circ$.

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cotg } 30^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

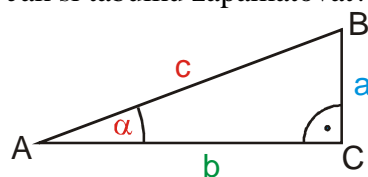
Přepíšeme hodnoty do tabulky. Hodnoty funkcí pro 0° a 90° neurčíme pomocí pravoúhlého trojúhelníka (žádný takový neexistuje), ale dodefinujeme si je jako čísla, ke kterým se hodnoty funkce blíží, když se x blíží 0° nebo 90° .

Hodnoty goniometrických funkcí pro základní úhly:

Úhel [°]	0	30	45	60	90
----------	---	----	----	----	----

$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg}(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\text{cotg}(x)$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Jak si tabulku zapamatovat?



$\sin x = \frac{a}{c} \Rightarrow$ s **rostoucím úhlem** α se hodnota $\sin x$ **zvětšuje**

$\cos x = \frac{b}{c} \Rightarrow$ s **rostoucím úhlem** α se hodnota $\cos x$

zmenšuje

Úhel [°]	0	30	45	60	90
$\sin(x)$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(x)$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$
$\text{tg}(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\text{cotg}(x)$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Všechny hodnoty funkcí $\sin x$ a $\cos x$ můžeme zapsat ve stejném tvaru $\frac{\sqrt{\text{číslo}}}{2}$.

- Pro $\sin x$ dosazujeme postupně 0 až 4 (hodnoty rostou).
- Pro $\cos x$ dosazujeme postupně 4 až 0 (hodnoty klesají).

Př. 4: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 30^\circ$ má velikost přepony $c = 4 \text{ cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pro β platí: $\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Pro stranu a : $\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \sin \alpha \cdot c = \sin 30^\circ \cdot 4 = 2 \text{ cm}$.

Pro stranu b : $\cos \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \cos \alpha \cdot c = \cos 30^\circ \cdot 4 = 3,46 \text{ cm}$.

Př. 5: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 40^\circ$ má velikost odvěsny $a = 9 \text{ cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pro β platí: $\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

$$\text{Pro stranu } c: \sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{9}{\sin 40^\circ} = 14,00 \text{ cm}.$$

$$\text{Pro stranu } b: \text{tg } \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\text{tg } \alpha} = \frac{9}{\text{tg } 40^\circ} = 10,73 \text{ cm}.$$

Pedagogická poznámka: Studentům je dobré připomenout zásadu, podle které se snažíme počítat přímo ze zadaných hodnot. Pro většinu z nich je u předchozího příkladu přirozenější vypočítat přeponu a stranu b počítat z ní.

Př. 6: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem β a s úhlem $\alpha = 25^\circ$ má velikost odvěsny $a = 10 \text{ cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pravým úhlem v trojúhelníku je $\beta \Rightarrow$ goniometrické funkce musíme používat ve tvaru $\sin \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}}$ (platí vždy) ne ve tvaru $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ (platí pouze u trojúhelníků s pravým úhlem γ).

$$\text{Pro } \gamma \text{ platí: } \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 25^\circ - 90^\circ = 65^\circ.$$

$$\text{Pro stranu } b: \sin \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin 25^\circ} = 23,66 \text{ cm}.$$

$$\text{Pro stranu } c: \text{tg } \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\text{tg } \alpha} = \frac{10}{\text{tg } 25^\circ} = 21,45 \text{ cm}.$$

Shrnutí: Velikost úhlu v pravoúhlém trojúhelníku přímo popisuje jeho tvar poměrem stran.

Tyto poměry zavádíme jako goniometrické funkce $\sin x = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}}$,

$$\cos x = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}}, \text{tg } \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}}, \text{cotg } \alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}}.$$