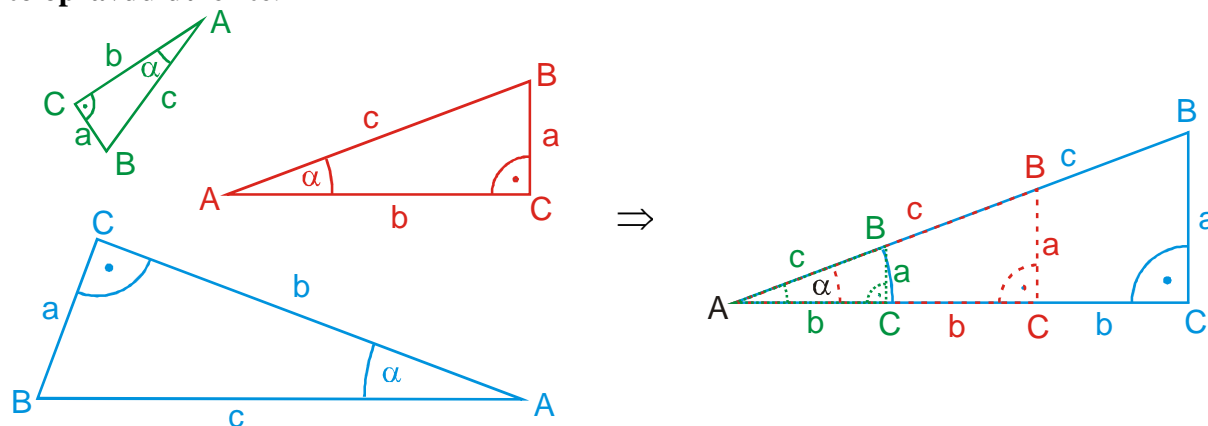


## 4.2.1 Goniometrické funkce ostrého úhlu

**Předpoklady:** 1107

Dnešní látku opakujeme už potřetí (poprvé na začátku matematiky, podruhé ve fyzice)  $\Rightarrow$  **je to opravdu důležité.**



Všechny pravoúhlé trojúhelníky s úhlem  $\alpha$  mají dva stejné úhly ( $\alpha$  a  $90^\circ$ )  $\Rightarrow$  mají stejný i třetí úhel (je to zbytek do  $180^\circ$ )  $\Rightarrow$  mají stejný tvar  $\Rightarrow$  jsou si podobné  $\Rightarrow$  mají stejný poměr odpovídajících si stran  $\Rightarrow$  poměr  $\frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c}$  je stejné číslo u všech pravoúhlých trojúhelníků s úhlem  $\alpha$ .

Když si vybereme úhel  $\alpha$ , tak už je jasné kolik vyjde v pravoúhlém trojúhelníku s tímto úhlem poměr  $\frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c} \Rightarrow$  **poměr**  $\frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c}$  **je číslo jednoznačně určené**

**velikostí úhlu  $\alpha$**   $\Rightarrow$  poměr  $\frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c}$  můžeme považovat za hodnotu nějaké funkce vyrobenou z čísla  $\alpha$ .

Funkci nazveme sinus  $\alpha$  ( $\sin \alpha$ )  $\Rightarrow y = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c} = \sin \alpha$ .

**Za hodnotu funkce  $y = \sin x$  pro  $x \in (0^\circ; 90^\circ)$  považuje hodnotu zlomku  $\frac{a}{c}$ , kde  $a$  je velikost protilehlé odvěsny a  $c$  je velikost přepony v libovolném pravoúhlém trojúhelníku s úhlem  $x$ .**

**Podobně můžeme využít i další poměry stran v pravoúhlém trojúhelníku s úhlem  $x$ :**

$$\cos x = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{b}{c} \quad \text{tg } \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{a}{b} \quad \text{cotg } \alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{b}{a}$$

Vzorce pro goniometrické funkce:

- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  Proč?

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

- $\operatorname{tg} \alpha = (\operatorname{cotg} \alpha)^{-1}$  Proč?

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha} = (\operatorname{cotg} \alpha)^{-1}$$

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  Proč?

Pythagorova věta:  $a^2 + b^2 = c^2 \quad / : c^2$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

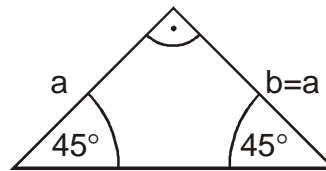
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Jak určíme hodnoty výpočtem?

Jde to pro vhodné úhly v trojúhelnících, kde známe délky stran.

### 1. rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník

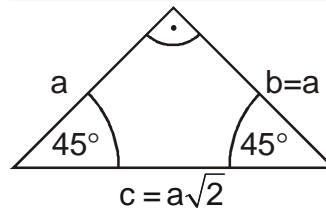
Ramena jsou stejné dlouhá.



Délka přepony pomocí Pythagorovy věty:

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$



**Př. 1:** Urči pomocí rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel  $x = 45^\circ$ .

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

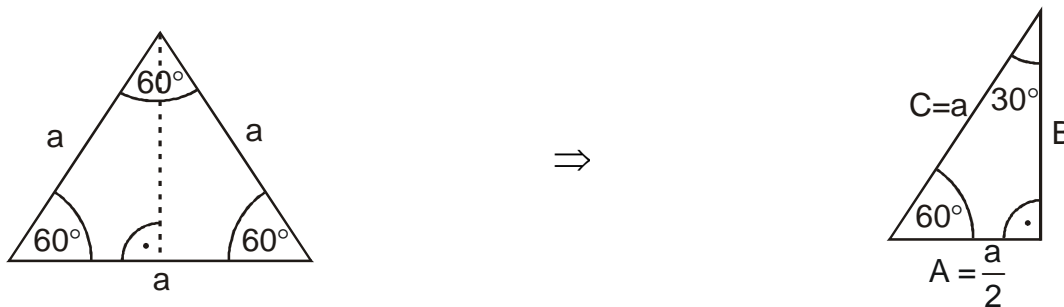
$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přílehlá}} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{přílehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{\text{přílehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{a}{a} = 1$$

### 2. rovnostranný trojúhelník

Výška na libovolnou stranu rozdělí trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky s úhly  $30^\circ$  a  $60^\circ$ .

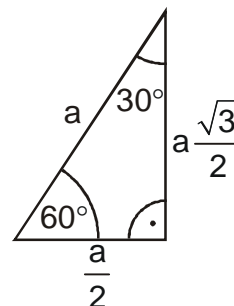


Délka delší odvěsny pomocí Pythagorovy věty:

$$C^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow B^2 = C^2 - A^2$$

$$B^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$B = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = a\sqrt{\frac{3}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$



**Př. 2:** Urči pomocí poloviny rovnostranného trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel  $x = 60^\circ$ .

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{cotg } 60^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**Př. 3:** Urči pomocí poloviny rovnostranného trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel  $x = 30^\circ$ .

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cotg } 30^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

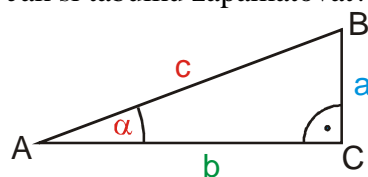
Přepíšeme hodnoty do tabulky. Hodnoty funkcí pro  $0^\circ$  a  $90^\circ$  neurčíme pomocí pravoúhlého trojúhelníka (žádný takový neexistuje), ale dodefinujeme si je jako čísla, ke kterým se hodnoty funkce blíží, když se  $x$  blíží  $0^\circ$  nebo  $90^\circ$ .

**Hodnoty goniometrických funkcí pro základní úhly:**

Úhel [°]	0	30	45	60	90
----------	---	----	----	----	----

$\sin(x)$	<b>0</b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	<b>1</b>
$\cos(x)$	<b>1</b>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	<b>0</b>
$\text{tg}(x)$	<b>0</b>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	<b>1</b>	$\sqrt{3}$	
$\text{cotg}(x)$		$\sqrt{3}$	<b>1</b>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	<b>0</b>

Jak si tabulku zapamatovat?



$\sin x = \frac{a}{c} \Rightarrow$  s **rostoucím úhlem**  $\alpha$  se hodnota  $\sin x$  **zvětšuje**

$\cos x = \frac{b}{c} \Rightarrow$  s **rostoucím úhlem**  $\alpha$  se hodnota  $\cos x$

**zmenšuje**

Úhel [°]	<b>0</b>	<b>30</b>	<b>45</b>	<b>60</b>	<b>90</b>
$\sin(x)$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(x)$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$
$\text{tg}(x)$	<b>0</b>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	<b>1</b>	$\sqrt{3}$	
$\text{cotg}(x)$		$\sqrt{3}$	<b>1</b>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	<b>0</b>

Všechny hodnoty funkcí  $\sin x$  a  $\cos x$  můžeme zapsat ve stejném tvaru  $\frac{\sqrt{\text{číslo}}}{2}$ .

- Pro  $\sin x$  dosazujeme postupně 0 až 4 (hodnoty rostou).
- Pro  $\cos x$  dosazujeme postupně 4 až 0 (hodnoty klesají).

**Př. 4:** Pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s pravým úhlem  $\gamma$  a s úhlem  $\alpha = 30^\circ$  má velikost přepony  $c = 4 \text{ cm}$ . Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pro  $\beta$  platí:  $\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

Pro stranu  $a$ :  $\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \sin \alpha \cdot c = \sin 30^\circ \cdot 4 = 2 \text{ cm}$ .

Pro stranu  $b$ :  $\cos \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \cos \alpha \cdot c = \cos 30^\circ \cdot 4 = 3,46 \text{ cm}$ .

**Př. 5:** Pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s pravým úhlem  $\gamma$  a s úhlem  $\alpha = 40^\circ$  má velikost odvěsny  $a = 9 \text{ cm}$ . Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pro  $\beta$  platí:  $\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ .

$$\text{Pro stranu } c: \sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{9}{\sin 40^\circ} = 14,00 \text{ cm}.$$

$$\text{Pro stranu } b: \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{9}{\operatorname{tg} 40^\circ} = 10,73 \text{ cm}.$$

**Pedagogická poznámka:** Studentům je dobré připomenout zásadu, podle které se snažíme počítat přímo ze zadaných hodnot. Pro většinu z nich je u předchozího příkladu přirozenější vypočítat přeponu a stranu  $b$  počítat z ní.

**Př. 6:** Pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s pravým úhlem  $\beta$  a s úhlem  $\alpha = 25^\circ$  má velikost odvěsny  $a = 10 \text{ cm}$ . Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pravým úhlem v trojúhelníku je  $\beta \Rightarrow$  goniometrické funkce musíme používat ve tvaru  $\sin \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}}$  (platí vždy) ne ve tvaru  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$  (platí pouze u trojúhelníků s pravým úhlem  $\gamma$ ).

$$\text{Pro } \gamma \text{ platí: } \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 25^\circ - 90^\circ = 65^\circ.$$

$$\text{Pro stranu } b: \sin \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin 25^\circ} = 23,66 \text{ cm}.$$

$$\text{Pro stranu } c: \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{10}{\operatorname{tg} 25^\circ} = 21,45 \text{ cm}.$$

**Shrnutí:** Velikost úhlu v pravoúhlém trojúhelníku přímo popisuje jeho tvar poměrem stran.

Tyto poměry zavádíme jako goniometrické funkce  $\sin x = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}}$ ,

$$\cos x = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}}, \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}}.$$