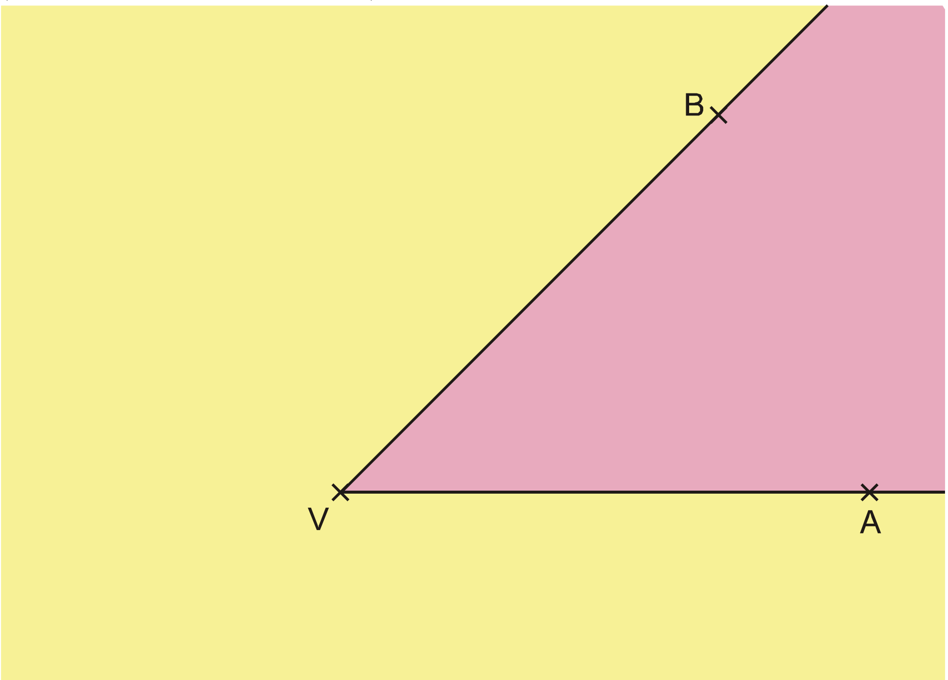
3.5.8 Otočení

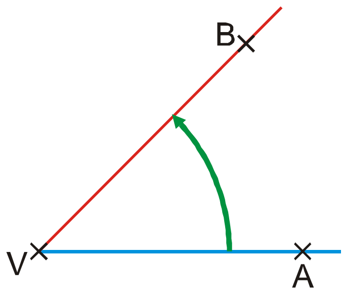
Předpoklady: 3506

Definice úhlu ze základní školy:
Úhel je část roviny ohraničená dvojicí polopřímek se společným počátečním bodem (konvexní a nekonvexní úhel).



Nevýhody této definice:
- Nevíme, jaký úhel máme na mysli (konvexní - růžový nebo nekonvexní - žlutý?)
- Když chceme pomocí úhlu popsat otáčení, nevíme, co úhel popisuje (máme točit nahoru nebo dolů?)

$\Rightarrow$ budeme používat novinku: **orientovaný úhel**
- uspořádaná dvojice polopřímek (VA, VB**) se společným počátkem** V **.**
Píšeme: $\widehat{AVB}$ (VA - počáteční rameno, VB - koncové rameno, V = vrchol)
$\Rightarrow$ úhel vznikne otočením polopřímky z polohy počátečního ramena do polohy koncového ramena



Dále budeme značit počáteční rameno modře, konečné červeně. Směr otáčení bude vyznačen šipkou.

Pokud máme jednoznačně nakreslit $\widehat{AVB} = 30^\circ$, musíme vědět, co je kladný a co záporný směr otáčení $\Rightarrow$

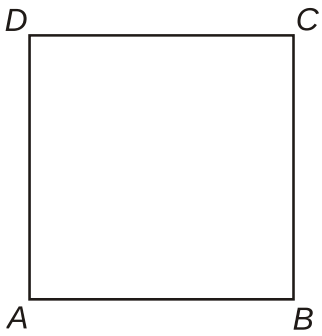
- **Za kladné považujeme otáčení proti směru hodinových ručiček.**
- **Za záporné považujeme otáčení po směru hodinových ručiček.**

Nyní můžeme jednoznačně zavést **základní velikost úhlu**:

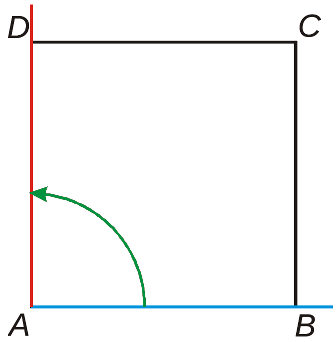
- Základní velikost orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$ je velikost úhlu, který vytvoří počáteční rameno nejkratším otočením do koncového ramena v kladném smyslu.
- Vždy jde o číslo v intervalu $\langle 0; 360^\circ)$ (případně v obloukové míře $\langle 0; 2\pi)$)

Př. 1: Na obrázku je nakreslen čtverec *ABCD*. Urči základní velikost úhlů:

a) $\widehat{BAD}$ b) $\widehat{ABC}$ c) $\widehat{CDA}$

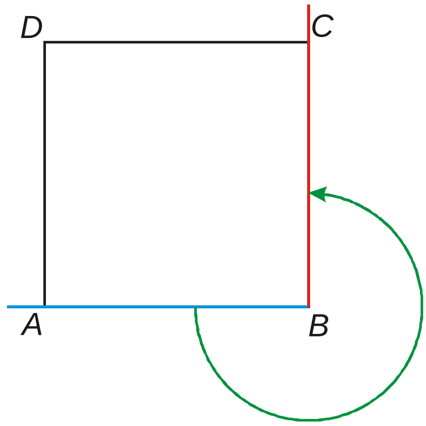


a) $\widehat{BAD}$



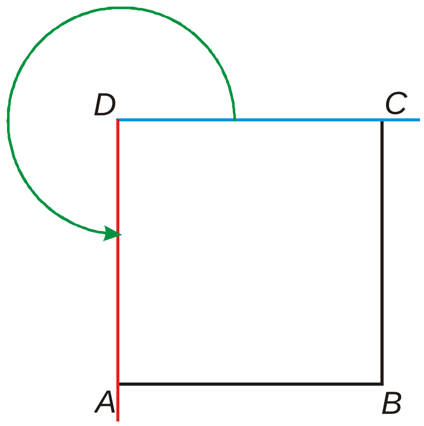
$\Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$

b) $\widehat{ABC}$



$\Rightarrow \widehat{ABC} = 270^\circ$

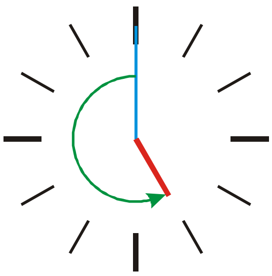
c) $\widehat{CDA}$



$\Rightarrow \widehat{CDA} = 270°$

Kromě základní velikosti (která je určena jednoznačně) má orientovaný úhel nekonečně mnoho dalších velikostí, které se od základní velikosti i od sebe navzájem liší o násobky $360°$. Například jednou z velikostí úhlu $\widehat{CDA}$ z předchozího příkladu je $-90°$ (otočím počáteční rameno do koncového o $90°$ ve směru hodinových ručiček, tedy v záporném směru).

Př. 2: Urči velikost orientovaného úhlu, který svírá velká ručička (počáteční rameno) a malá ručička (koncové rameno) v pět hodin.

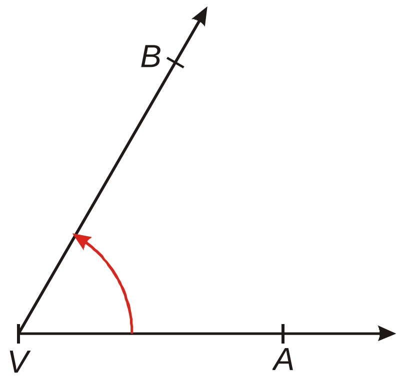


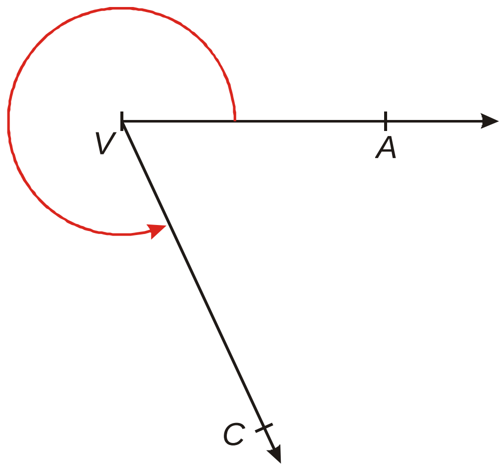
Počáteční rameno by se do koncového otočilo po dráze $12 \Rightarrow 9 \Rightarrow 6 \Rightarrow 5$, tedy $\alpha = 7 \cdot 30° = 210°$.

Př. 3: Je dána polopřímka *VA*. Sestroj orientovaný úhel:

a) $\widehat{AVB} = 60°$ b) $\widehat{AVC} = 295°$

a) $\widehat{AVB} = 60°$ b) $\widehat{AVC} = 295°$





Pedagogická poznámka: Najdou se studenti, kteří mají problém s tím, že jejich úhloměry mají stupnici pouze do $180°$. Když však není zbytí a ujistíte je, že úhel $295°$ jde narýsovat i s úhloměrem do $180°$, nakonec si s tím poradí.

Definice:
Je dán orientovaný úhel o velikosti φ a bod *S*. Otočení (rotace) je shodné zobrazení $R(S;\varphi)$, které přiřazuje:
1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel $\widehat{XSX'}$ má velikost φ.
2. bodu *S* bod $S' = S$.

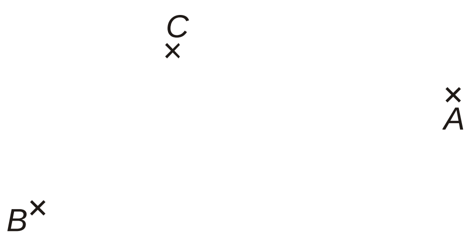
Terminologie:
S – střed otočení
φ - úhel otočení

Př. 4: Rozhodni zda v zobrazení $R(S;\varphi)$ existují samodružné body.

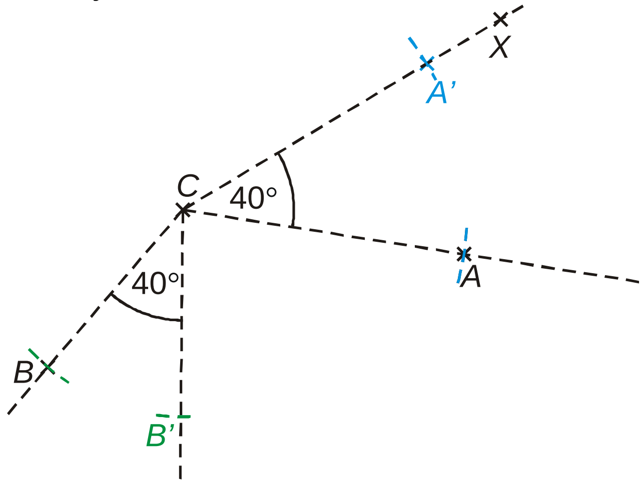
Záleží na úhlu otočení:
pokud, platí $\varphi = 0 + k \cdot 360°; k \in \mathbb{Z}$ (otáčíme o násobky $360°$): všechny body jsou samodružné
pokud, platí $\varphi \neq 0 + k \cdot 360°; k \in \mathbb{Z}$: jediným samodružným bodem je bod *S*.

Pedagogická poznámka: Příklad je před první rýsování zařazen schválně, aby si studenti zkusili představit výsledky rýsování. Výsledek příkladu mohou získat i tím, že si zkusí otočit papírem.

Př. 5: Jsou dány různé body *A*, *B*, *C*. Najdi obrazy bodů *A*, *B* v zobrazení $R(C;40°)$.



Bod *C* je středem otáčení.



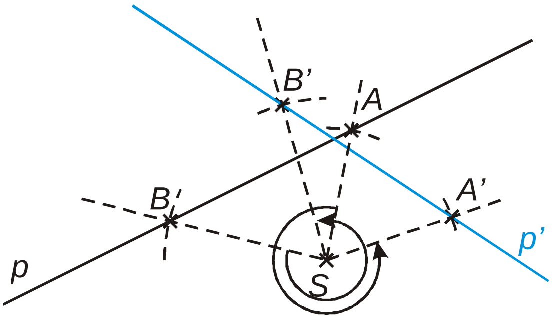
Zápis konstrukce:

1. $A; B; C$
2. $\mapsto CX; \left|\widehat{ACX}\right| = 40^\circ$
3. $A'; A' \in \mapsto CX; |A'C| = |AC|$
4. $B'; R(C; 40^\circ): B \to B'$

Pedagogická poznámka: Úspěšnost řešení je podstatně větší než u prvního rýsování v hodině o posunutí, přesto se určitě najde několik nesmyslných obrázků. Nejdříve si musíme vyjasnit, který bod hraje roli středu a že bod *B* nemá na konstrukci bodu A' žádný vliv (jedna z nejhlubších mylných představ, že všechno zadané je pořád potřeba). Pak se snažím se studenty projít definici a postupně plnit její body.

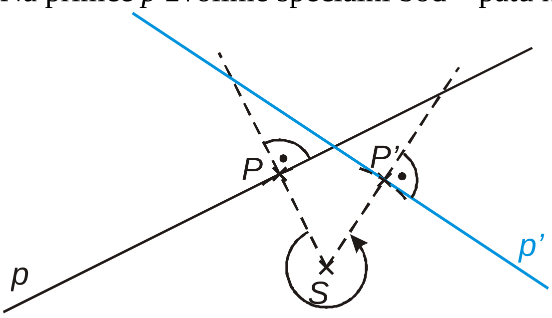
Př. 6: Je dán bod *S* a přímka *p* tak, že $S \notin p$ Narýsuj obraz přímky *p* v otočení $R(S; 300^\circ)$. Najdi co nejrychlejší řešení.

Obraz přímky můžeme najít pomocí dvou libovolných bodů *A*, *B* (samozřejmě mohou mít i jiná jména). Najdeme jejich obrazy, které nám určí přímku p'.



Uvedený postup je zdlouhavý – musíme konstruovat obrazy dvou bodů.

Na přímce *p* zvolíme speciální bod – patu kolmice z bodu *S*.

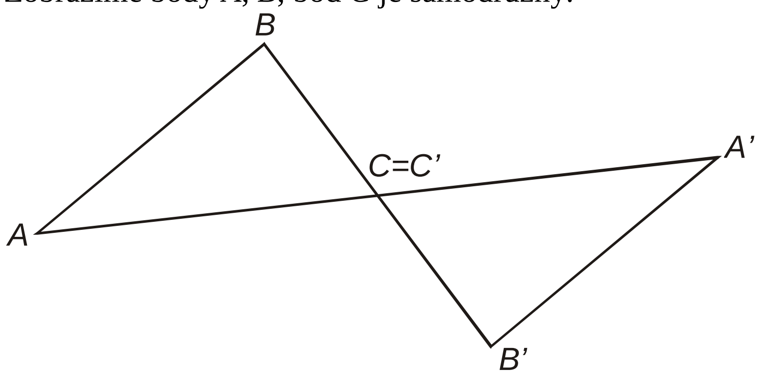


Protože otočení je shodné zobrazení, zachovává úhly $\Rightarrow$ přímku p' můžeme sestrojit jako kolmici na polopřímku SP' v bodě P'.

Pedagogická poznámka: Je zajímavé, že počet studentů, kteří zobrazování přímky pomocí paty kolmice samostatně objeví, je značně menší, než těch, kteří tento způsob objevili u středové souměrnosti.
Značné množství studentů má problémy i s prvním způsobem. Těm je třeba opakovat základní jistotu, že přímka je určena dvěma body a otáčení bodů už ovládají.

Př. 7: Je dán trojúhelník *ABC*. Sestroj obraz trojúhelníku v zobrazení $R(C;180°)$. Najdi zobrazení, které přiřazuje trojúhelníků stejný obraz.

Zobrazíme body *A*, *B*, bod *C* je samodružný.



Získali jsme stejný obraz jako ve středové souměrnosti $S(C)$ $\Rightarrow$ středová souměrnost je otočení o $180°$.

Shrnutí: