

### 3.4.5 Konstrukce trojúhelníků I

#### Předpoklady: 3404

U konstrukčních úloh rozeznáváme dva základní typy:

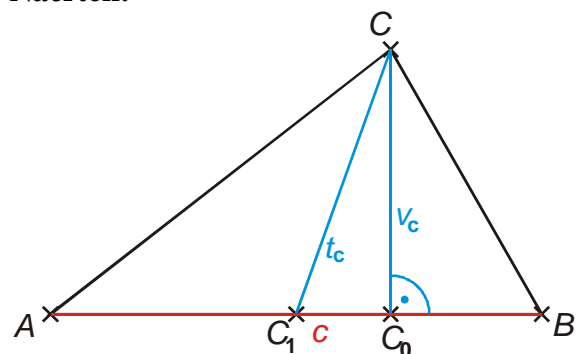
- **polohové úlohy:** jejich zadání většinou začíná slovy „Je dána ...“. Tato věta znamená, že konstrukci musíme začít prvkem, který je dán v úvodní větě.
- **nepolohové úlohy:** jejich zadání větu „Je dána...“ neobsahuje. Ze zadaných prvků si můžeme vybrat kterýkoliv a začít konstrukci od něj.

Ve všech případech je velmi vhodné začít řešení příkladů náčrtem, ve kterém zakreslíme známé prvky trojúhelníka, u polohových úloh pak vyznačíme prvek, kterým musíme začít.

**Př. 1:** Je dána úsečka  $AB$ ,  $|AB| = 6\text{ cm}$ . Sestroj všechny trojúhelníky  $ABC$  se stranou  $AB$ , pro které platí  $v_c = 4\text{ cm}$ ,  $t_c = 6\text{ cm}$ .

Polohová úloha  $\Rightarrow$  jako první rýsujeme úsečku  $AB$ .

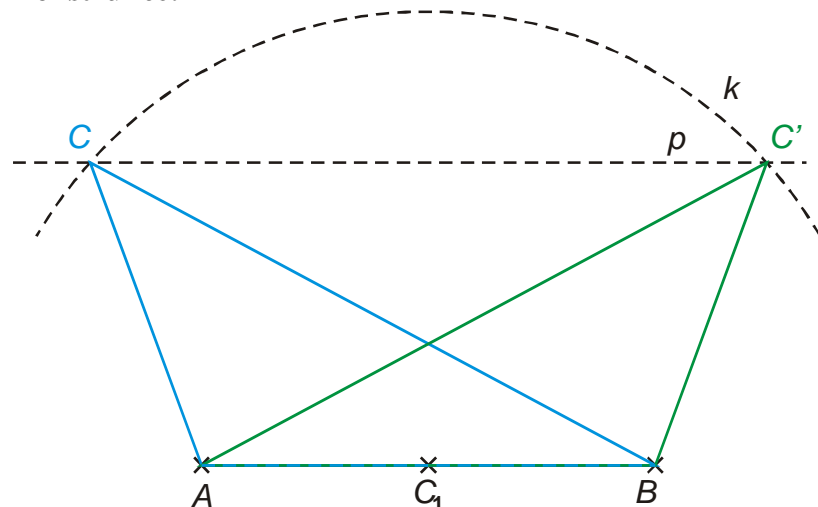
**Náčrtek:**



Hledáme vrchol  $C$ :

- známe výšku  $v_c \Rightarrow$  bod  $C$  leží na rovnoběžce s úsečkou  $AB$  vzdálené o  $v_c$ ,
- známe těžiště  $t_c \Rightarrow$  bod  $C$  leží na kružnici  $k(C_1; t_c)$ .

**Konstrukce:**



**Zápis konstrukce:**

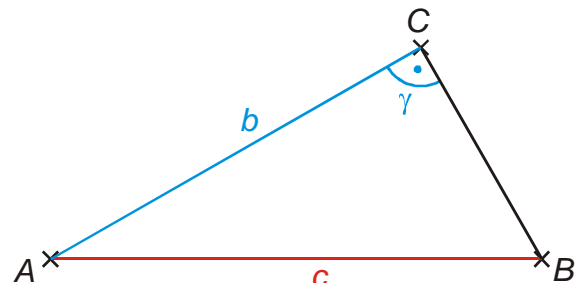
1.  $AB, |AB| = c = 6\text{ cm}$
2.  $p; p \parallel AB; |pAB| = 4\text{ cm}$
3.  $C_1; C_1$  je střed  $AB$
4.  $k, k(C_1; t_c = 6\text{ cm})$
5.  $C, C', \{C, C'\} = k \cap p$
6.  $\triangle ABC, \triangle ABC'$

**Rozbor:** Úloha může mít v jedné polorovině 0 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků přímky  $p$  s kružnicí  $k$ .

**Př. 2:** Je dána úsečka  $AB$ ,  $|AB| = 6 \text{ cm}$ . Sestroj všechny pravoúhlé trojúhelníky  $ABC$  se stranou  $AB$  a pravým úhlem  $\gamma$ , pro které platí  $b = 5 \text{ cm}$ .

Polohová úloha  $\Rightarrow$  jako první rýsujeme úsečku  $AB$ .

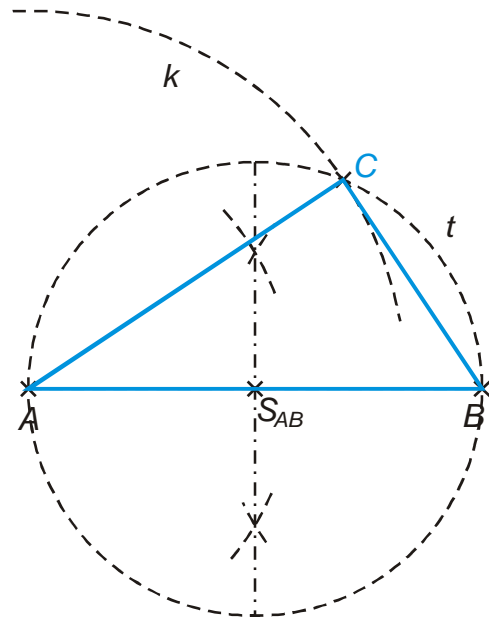
**Náčrtek:**



Hledáme vrchol  $C$ :

- známe stranu  $b \Rightarrow$  bod  $C$  leží na kružnici  $k(A; b)$ ,
- známe úhel  $\gamma = 90^\circ \Rightarrow$  bod  $C$  leží na kružnici  $t\left(S_{AB}; \frac{c}{2}\right)$  (Thaletova kružnice nad stranou  $c$ ).

**Konstrukce:**



**Zápis konstrukce:**

1.  $AB, |AB| = c = 6 \text{ cm}$
2.  $k; k(A; b = 5 \text{ cm})$
3.  $t; t\left(S_{AB}; \frac{c}{2} = 3 \text{ cm}\right)$
4.  $C, \{C\} = k \cap t$
5.  $\triangle ABC$

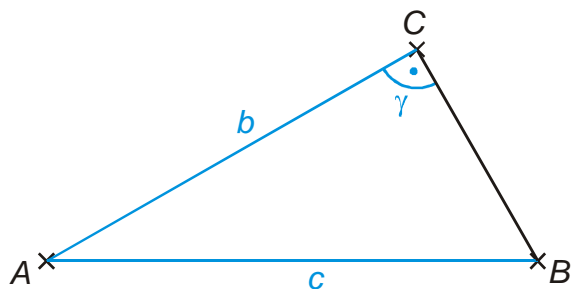
**Rozbor:** Úloha může mít v jedné polorovině žádné nebo jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnic  $k$  a  $t$ .

**Pedagogická poznámka:** Při kreslení náčrtků kontroluji, jestli jsou nakreslené trojúhelníky alespoň přibližně pravoúhlé.

**Př. 3:** Sestroj trojúhelník  $ABC$ , pro který platí  $c = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$  a  $\gamma = 90^\circ$ .

Nepolohová úloha  $\Rightarrow$  můžeme zvolit prvek, který rýsujeme jako první.

**Náčrtek:**

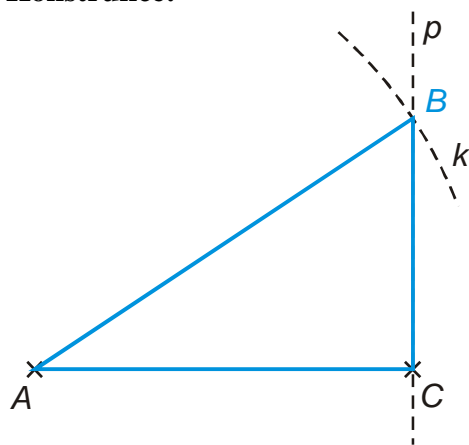


Pokud začneme od strany  $c$ , jde o stejnou úlohu jako v příkladě 2.

Začneme stranou  $b \Rightarrow$  hledáme vrchol  $B$ :

- známe stranu  $c \Rightarrow$  bod  $B$  leží na kružnici  $k(A; c)$ ,
- známe úhel  $\gamma = 90^\circ \Rightarrow$  můžeme narýsovat polopřímku  $CB$ .

**Konstrukce:**



**Zápis konstrukce:**

1.  $AC, |AC| = b = 5 \text{ cm}$
2.  $k; k(A; c = 6 \text{ cm})$
3.  $p; p \perp AC; C \in p$
4.  $B, \{B\} = k \cap p$
5.  $\triangle ABC$

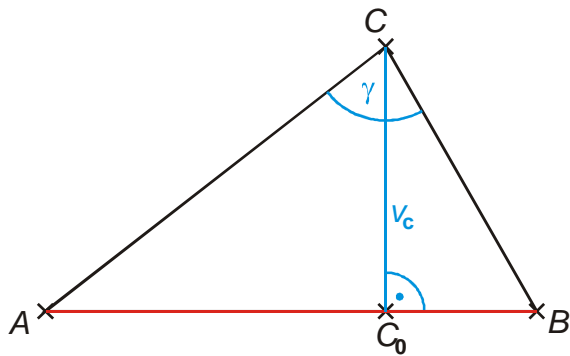
**Rozbor:** Úloha může mít v jedné polorovině žádné nebo jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnice  $k$  a přímky  $p$ .

**Pedagogická poznámka:** Studentům, kteří jsou hodně napřed a myslí si, že příklad 3 je stejný jako příklad 2, říkám nejdřív, že to není pravda a nechám je přemýšlet samotné. Problém shodnosti obou příkladů pak řešíme s celou třídou, aby si všichni uvědomili rozdíl (v příkladu 2. je dáno, jak musíme začít, v příkladu 3 si můžeme celý postup zvolit. Pokud máme dost času, nechávám studenty rýsovat postup od strany  $b$ , jinak ihned přecházíme na další příklady.

**Př. 4:** Je dána úsečka  $AB$ ,  $|AB| = 6 \text{ cm}$ . Sestroj všechny trojúhelníky  $ABC$  se stranou  $AB$ , pro které platí  $v_c = 3 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 60^\circ$ .

Polohová úloha  $\Rightarrow$  jako první rýsujeme úsečku  $AB$ .

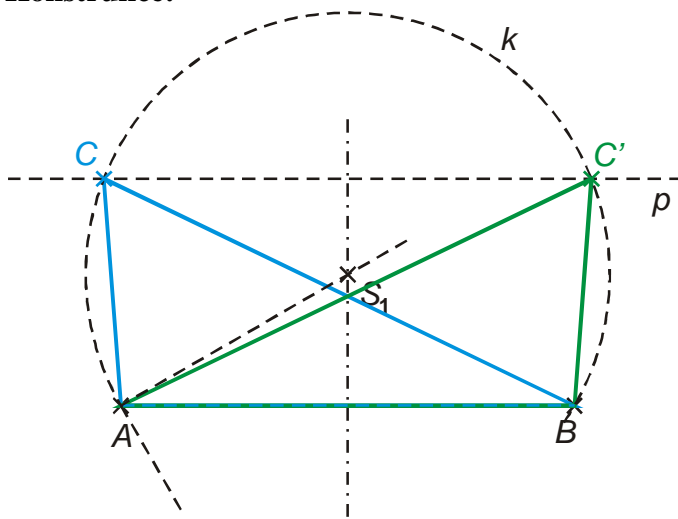
**Náčrtek:**



Hledáme vrchol  $C$ :

- známe výšku  $v_c \Rightarrow$  bod  $C$  leží na rovnoběžce s úsečkou  $AB$  vzdálené o  $v_c$ ,
- známe úhel  $\gamma = 60^\circ \Rightarrow$  bod  $C$  leží na množině bodů, ze které je úsečka  $AB$  vidět pod úhlem  $60^\circ$ .

**Konstrukce:**



**Zápis konstrukce:**

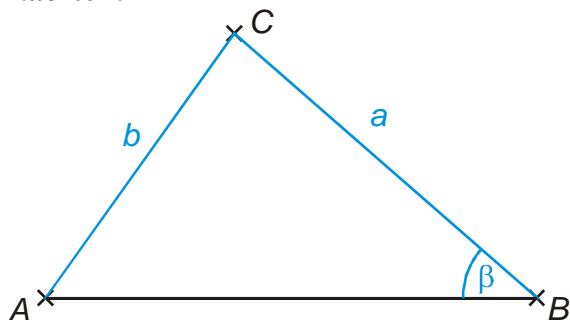
1.  $AB, |AB| = c = 6 \text{ cm}$
2.  $p; p \parallel AB; |pAB| = 3 \text{ cm}$
3.  $k; k = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \angle AXB = 60^\circ\}$
4.  $C, C', \{C, C'\} = k \cap p$
5.  $\triangle ABC, \triangle ABC'$

**Rozbor:** Úloha může mít v jedné polorovině 0 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků přímky  $p$  s kružnicí  $k$ .

**Př. 5:** Sestroj trojúhelník  $ABC$ , pro který platí  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$  a  $\beta = 50^\circ$ . Najdi alespoň dva různé postupy konstrukce vycházející od dvou různých zadaných prvků a porovnej jejich výhodnost.

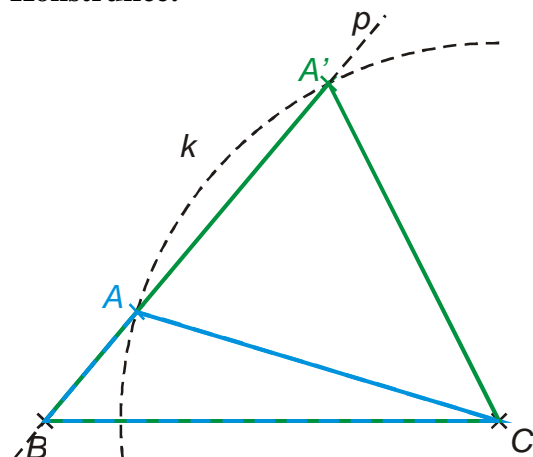
Nepolohová úloha  $\Rightarrow$  můžeme zvolit prvek, který rýsujeme jako první.

**Náčrtek:**



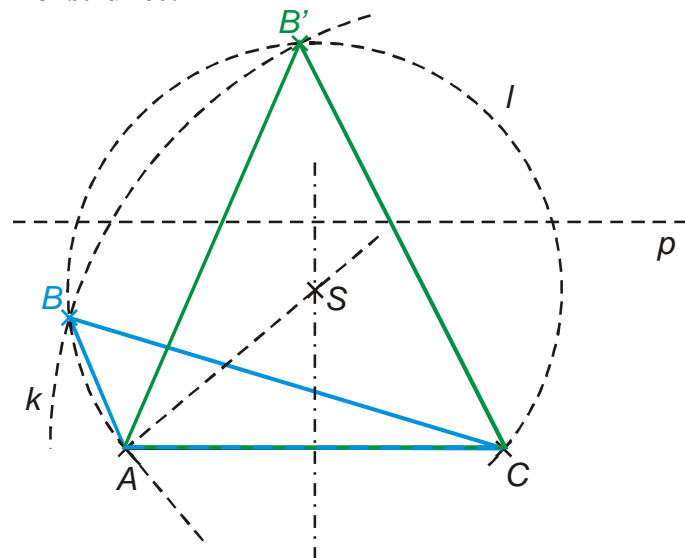
Začneme stranou  $a \Rightarrow$  hledáme vrchol  $A$ :

- známe stranu  $b \Rightarrow$  bod  $A$  leží na kružnici  $k(C; b)$ ,
- známe úhel  $\beta = 50^\circ \Rightarrow$  můžeme narýsovat polopřímku  $BA$ .

**Konstrukce:**

Začneme stranou  $b \Rightarrow$  hledáme vrchol  $B$ :

- známe stranu  $a \Rightarrow$  bod  $B$  leží na kružnici  $k(C; a)$ ,
- známe úhel  $\beta = 50^\circ \Rightarrow$  bod  $B$  leží na množině bodů, ze které je úsečka  $AC$  vidět pod úhlem  $50^\circ$ .

**Konstrukce:****Zápis konstrukce:**

1.  $BC, |BC| = a = 6 \text{ cm}$
2.  $k; k(C; b = 5 \text{ cm})$
3.  $p; |\sphericalangle p \leftrightarrow BC| = 50^\circ; B \in p$
4.  $A, A', \{A, A'\} = k \cap p$
5.  $\triangle ABC, \triangle ABC'$

**Zápis konstrukce:**

1.  $AC, |AC| = b = 5 \text{ cm}$
2.  $k; k(C; a = 6 \text{ cm})$
3.  $l; l = \{X \in \text{přímka} \mid \sphericalangle ACX = 50^\circ\}$
4.  $B, B', \{B, B'\} = k \cap l$
5.  $\triangle ABC, \triangle ABC'$

**Rozbor:** Úloha může mít v jedné polorovině 0 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků přímky  $p$  s kružnicí  $k$  (případně kružnic  $k$  a  $l$ ).

**Pedagogická poznámka:** Pokud si ukážete řešení obou možných postupů na tabuli, zkuste se zeptat studentů, jak je možné, že při prvním řešení mám dvě možnosti polohy bodu  $A$ , zatímco při druhém postupu dvě možnosti polohy bodu  $B$ , i přes to, že jde o řešení stejného příkladu.

**Pedagogická poznámka:** V hodině samozřejmě chci, aby studenti řešili příklad druhým protože nejtěžším způsobem.

**Dodatek:** Předchozí příklad je možné řešit i umístěním úhlu  $\beta$ . Jde však o stejný postup jako v při umístění strany  $a$ .

**Př. 6:** Petáková:  
strana 77/cvičení 17 c)  
strana 77/cvičení 14 a)

---

**Shrnutí:**