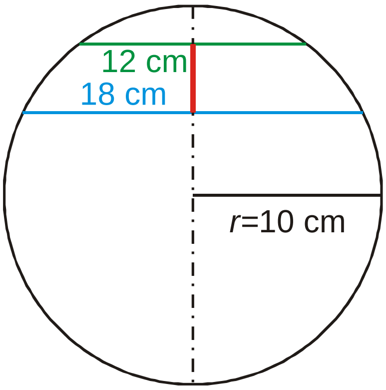
3.2.7 Příklady řešené pomocí vět pro trojúhelníky

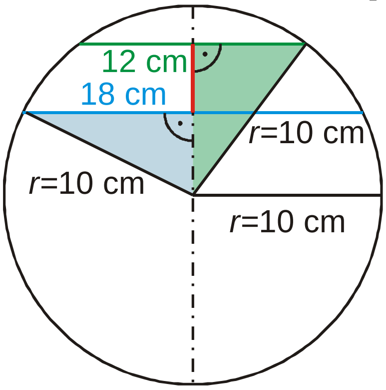
Předpoklady: 3204, 3206

Pedagogická poznámka: U následujících příkladů (a u mnoha dalších příkladů z geometrie) platí, že nedílnou součástí řešení je nápad (který se také nemusí dostavit). Proto v průběhu přemýšlení o příkladu postrkuji třídu pomocí návodných otázek.

Př. 1: V kružnici o poloměru $r = 10\,\text{cm}$ urči vzdálenost dvou rovnoběžných tětiv o délkách 12 cm a 18 cm.



V obrázku není nic, co by umožňovalo spočítat jakoukoliv vzdálenost. Musíme „dostat známé vzdálenosti k sobě“, nebo vytvořit trojúhelníky, je třeba využít vlastnosti kružnice $\Rightarrow$ dokreslíme do obrázku další poloměry tak, aby končily u krajních bodů obou tětiv.



Vzdálenost obou tětiv získáme jako rozdíl délek odvěsen ve vyznačených pravoúhlých trojúhelnících s přeponou $r = 10\,\text{cm}$.

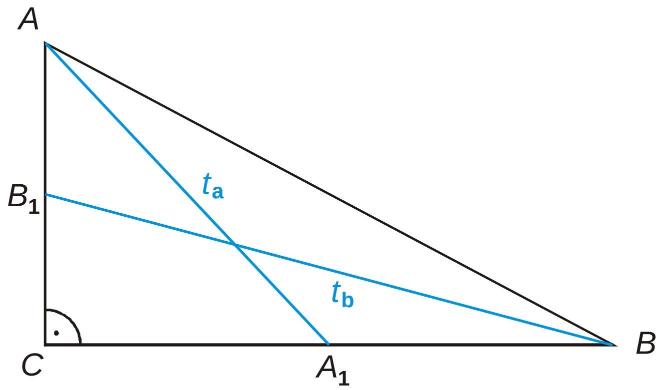
Zelený trojúhelník (kratší tětiva): $a_1 = \sqrt{c_1^2 - b_1^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$

Modrý trojúhelník (delší tětiva): $a_2 = \sqrt{c_2^2 - b_2^2} = \sqrt{10^2 - 9^2} = \sqrt{11}$

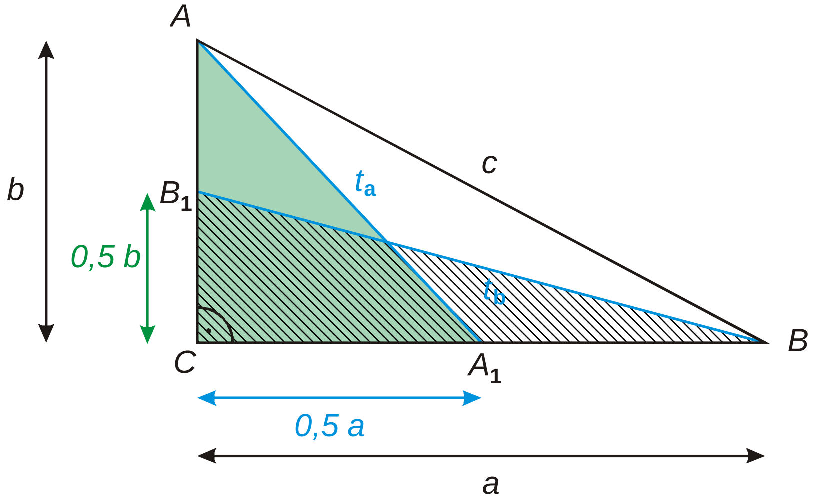
Vzdálenost obou tětiv? $d = a_1 - a_2 = 8 - \sqrt{19}\,\text{cm} \doteq 3{,}64\,\text{cm}$

Př. 2: V pravoúhlém trojúhelníku ABC ($\sphericalangle ACB = 90°$) je dáno: $t_a = 4$, $t_b = \sqrt{19}$. Urči délky stran trojúhelníka.

Nakreslíme obrázek:



Hledáme trojúhelníky, u kterých známe dva údaje (a třetí můžeme zjistit), těžnice vycházejí ze středů stran $\Rightarrow$



Dvakrát můžeme využít Pythagorovu větu:

- trojúhelník CBB_1: $t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$´
- trojúhelník CAA_1: $t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$´

$\Rightarrow$ získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\left(\sqrt{19}\right)^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}$$

$$4^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

Substituce: $a^2 = x$**,** $b^2 = y$

$$\begin{aligned} x + \frac{y}{4} &= 19 \\ \frac{x}{4} + y &= 16 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x \quad + \quad \frac{y}{4} &= 19 \\ \frac{15}{4} y &= 45 \end{aligned} \quad \Rightarrow \; y = 12$$

Dosadíme do první rovnice a vypočteme x:

$$x + \frac{12}{4} = 19 \;\Rightarrow\; x = 16$$

Návrat k původní proměnné:

$$a^2 = x = 16 \;\Rightarrow\; a = \sqrt{16} = 4$$

$b^2 = y = 12 \Rightarrow b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

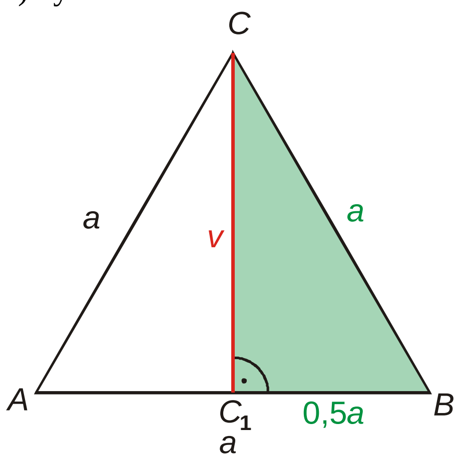
Určíme stranu *c*: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Trojúhelník *ABC* má strany o délkách $a = 4\,\text{cm}$, $b = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$, $c = 2\sqrt{7}\,\text{cm}$.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu studenti většinou nejdříve zkouší spočítat příklad dělením těžnic na části. Hlavním problém při řešení příkladu je pro studenty fakt, že sestavení jedné rovnice pro jeden z pravoúhlých trojúhelníků jim neumožní cokoliv dopočítat. Musí mít obě rovnice najednou, ale většina z nich příklad vzdá ve chvíli, kdy zjistí, že použít jeden z trojúhelníků k vyřešení příkladu nestačí.

Př. 3: Je dán rovnostranný trojúhelník *ABC* se stranou délky *a*. Urči:
a) výšku v b) poloměr kružnice opsané c) poloměr kružnice vepsané

a) výšku v



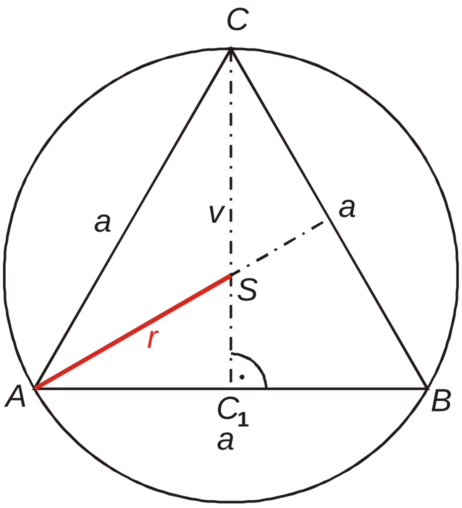
Výška je v rovnostranném trojúhelníku zároveň těžnicí $\Rightarrow$ rozdělí trojúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.

V trojúhelníku CBC_1 platí: $a^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

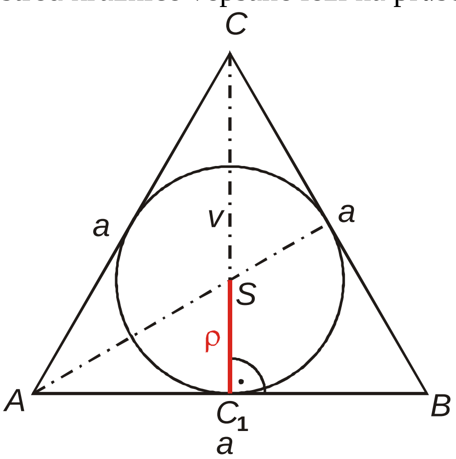
b) poloměr kružnice opsané
střed kružnice opsané leží na průsečíku os stran



osy stran jsou u rovnostranného trojúhelníku zároveň výškami i těžnicemi $\Rightarrow$ střed kružnice je v těžišti trojúhelníka a jeho poloměr je roven vzdálenosti SA, tedy dvěma třetinám výšky

$$r = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{2\sqrt{3}}{6}a$$

c) poloměr kružnice vepsané
střed kružnice vepsané leží na průsečíku os úhlů

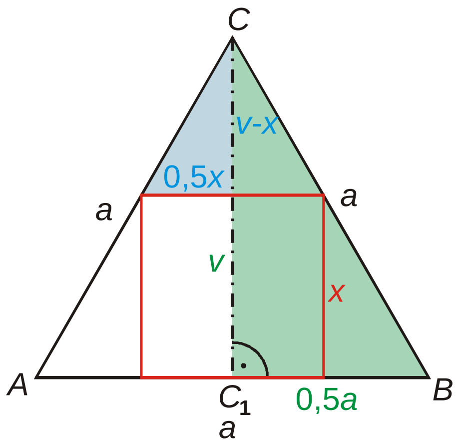


osy úhlů jsou u rovnostranného trojúhelníku zároveň výškami i těžnicemi $\Rightarrow$ střed kružnice vepsané je v těžišti trojúhelníka a jeho poloměr je roven vzdálenosti SC_1, tedy třetině výšky

$$r = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Př. 4: Do rovnostranného trojúhelníka *ABC* o straně *a* je vepsán čtverec. Urči délku strany čtverce.

Nakreslíme si obrázek:



V obrázku můžeme najít dva podobné trojúhelníky. Z poměru vyznačených stran vyplývá:

$$\frac{\frac{x}{2}}{v-x}=\frac{\frac{a}{2}}{v} \qquad\qquad \frac{x}{v-x}=\frac{a}{v}$$

$$vx = av - ax$$

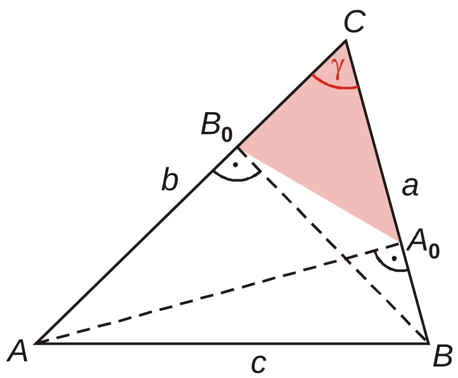
$$vx + ax = av \quad \Rightarrow \quad x=\frac{av}{v+a}$$

Dosadíme $v=\frac{\sqrt{3}}{2}a$: $x=\frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a+a}=\frac{a^2\frac{\sqrt{3}}{2}}{a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)}=\frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}=a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$

Vepsaný čtverec musí mít délku strany $x=a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$.

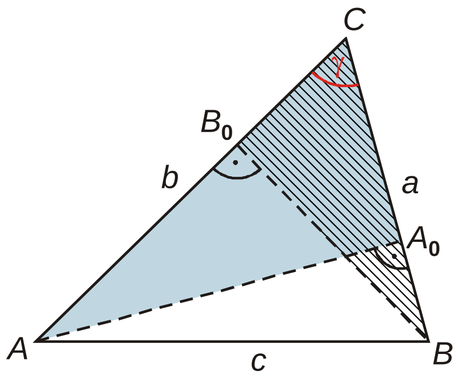
Př. 5: V ostroúhlém trojúhelníku ABC je vedena kolmice z bodu B na stranu AC s patou B_0 a kolmice z bodu A na stranu BC s patou A_0. Dokaž, že platí $\triangle ABC \sim \triangle A_0B_0C$.

Obrázek:



Trojúhelníky ABC a A_0B_0C se shodují v úhlu γ. Další úhel nemůžeme najít.

Zkusíme postupovat jiným způsobem. Ještě jsme nevyužili pravých úhlů u vrcholů A_0 B_0:



Podle věty ***uu*** jsou podobné trojúhelníky AA_0C a BB_0C (pravý úhel a úhel γ) $\Rightarrow$ musí platit i rovnosti poměrů stran: $\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{AC}{BC}=\frac{A_0C}{B_0C}$. Druhý a třetí zlomek v rovnosti obsahují strany trojúhelníků ABC a A_0B_0C $\Rightarrow$ upravíme s vztah: $\frac{AC}{BC}=\frac{A_0C}{B_0C}$ $\Rightarrow$ $\frac{B_0C}{BC}=\frac{A_0C}{AC}$ = poměr odpovídajících stran u trojúhelníků ABC a A_0B_0C je stejný $\Rightarrow$ platí $\triangle ABC \sim \triangle A_0B_0C$ podle věty ***sus***.

Pedagogická poznámka: Samozřejmě, že předchozí příklad samostatně neudělá. Těm lepším trocha zkoušení neuškodí. Jak zmíněno i v textu příkladu, důležité je, aby si studenti uvědomili, že v beznadějných situacích je možné postupovat i naslepo tak, že se snažíme využít informací o speciálních vlastnostech ze zadání.

Př. 6: Petáková:
strana 87/cvičení 41 c) e)
strana 88/cvičení 44
strana 88/cvičení 45

Shrnutí: