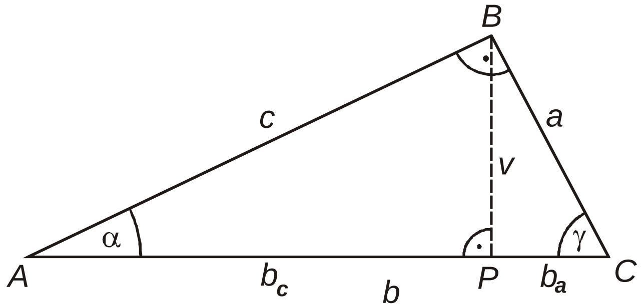
3.2.6 Pythagorova věta, Euklidovy věty II

Př. 1: V pravoúhlém trojúhelníku ABC platí $\beta = 90°$. Načrtni obrázek tohoto trojúhelníku (včetně vyznačení výšky a úseků přepony) a zapiš pro tento trojúhelník Pythagorovu větu a Euklidovy věty. Zapiš vztahy pro goniometrické funkce úhlů α a γ.



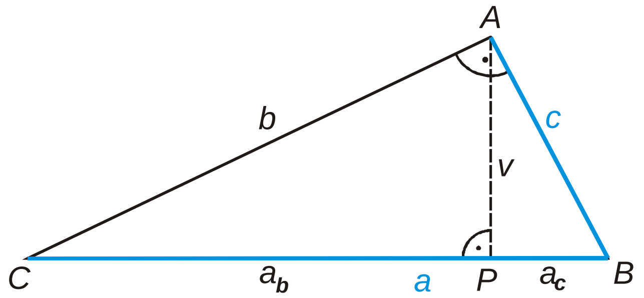
Pythagorova věta: $b^2 = a^2 + c^2$

Euklidovy věty: $v = \sqrt{b_a \cdot b_c}$, $c = \sqrt{b \cdot b_c}$, $a = \sqrt{b \cdot b_a}$

Goniometrické funkce: $\sin\alpha = \frac{a}{b}$, $\cos\alpha = \frac{c}{b}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{c}$, $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{c}{a}$

$\sin\gamma = \frac{c}{b}$, $\cos\gamma = \frac{a}{b}$, $\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{c}{a}$, $\mathrm{cotg}\,\gamma = \frac{a}{c}$

Př. 2: Vypočítej zbývající prvky (b, a_b, a_c, v, β, γ) v pravoúhlém trojúhelníku ABC $(\alpha = 90°)$, je-li dáno: $c = \sqrt{6}\,\mathrm{cm}$, $a = 3$.



$c^2 = a \cdot a_c \Rightarrow a_c = \frac{c^2}{a} = \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2}{3} = 2$

$a = a_c + a_b \Rightarrow a_b = a - a_c = 3 - 2 = 1$

$b = \sqrt{a \cdot a_b} = \sqrt{3 \cdot 1} = \sqrt{3}$

$v = \sqrt{a_c \cdot a_b} = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}$

$\sin\gamma = \frac{c}{a} \Rightarrow \gamma = 54°44'$

$\sin\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \beta = \beta = 35°16'$

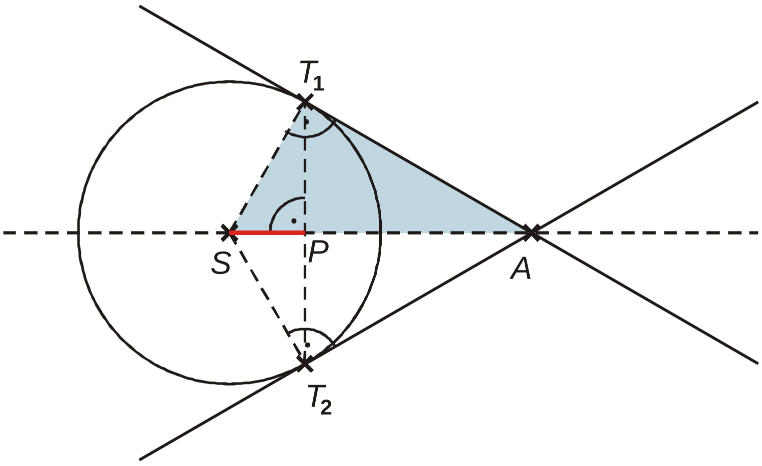
Př. 3: Dokaž Pythagorovu větu pomocí Euklidových vět.

dosadíme: $a^2 = c_a \cdot c$, $b^2 = c_b \cdot c$

$c^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b$ $\qquad$ $c^2 = c \cdot (c_a + c_b)$ $\qquad$ $c^2 = c \cdot c = c^2$

Př. 4: Je dána kružnice $k(S;2)$ a libovolný bod A, takový, že platí $|SA| = 4$. Z bodu M jsou sestrojeny tečny kružnice k a body dotyku těchto tečen T_1, T_2. Urči:
a) $|AT_1|$ b) vzdálenost středu S od úsečky T_1T_2 c) $|T_1T_2|$

a)Délku úsečky AT_1 určíme jako velikost odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku SAT_1:
$|AT_1| = \sqrt{|SA|^2 - |ST_1|^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$



b) vzdálenost středu S od úsečky T_1T_2 je v obrázku nakreslena jako úsečka SP. Úsečka SP je v pravoúhlém trojúhelníku SAT_1 jedním úsekem přepony $\Rightarrow$

$a^2 = c \cdot c_a \;\Rightarrow\; |ST_1|^2 = |SA| \cdot |SP| \;\Rightarrow\; |SP| = \dfrac{|ST_1|^2}{|SA|} = \dfrac{2^2}{4} = 1$

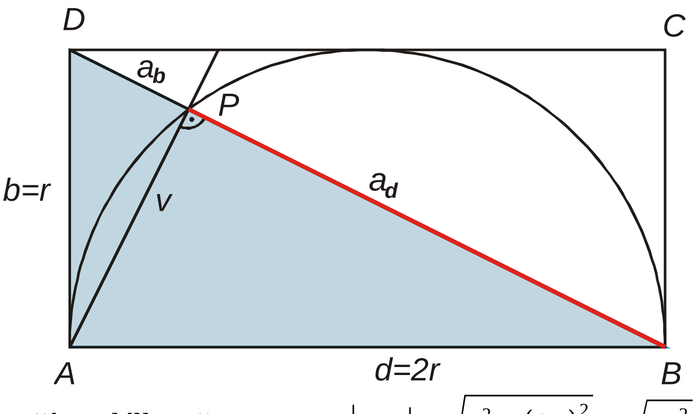
c) $|T_1T_2|$ bod P je středem úsečky $T_1T_2 \Rightarrow$ určíme vzdálenost PT_1 a vynásobíme ji dvěma úsečka PT_1 je výškou v pravoúhlém trojúhelníku $SAT_1 \Rightarrow$

$v = \sqrt{c_a \cdot c_b} \;\Rightarrow\; |PT_1| = \sqrt{|SP| \cdot |PA|}$

Spočteme $|PA| = |SA| - |ST_1| = 4 - 1 = 3$

Dosadíme: $|PT_1| = \sqrt{|SP| \cdot |PA|} = \sqrt{1 \cdot 3} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; |T_1T_2| = 2\sqrt{3}$

Př. 5: Nad úsečkou délky $2r$ je jako nad průměrem opsaná půlkružnice. Sestroj obdélník, jehož druhý rozměr je r. Jaká část úhlopříčky obdélníka leží uvnitř kružnice?



Určíme délku přepony BD: $|BD| = \sqrt{r^2 + (2r)^2} = \sqrt{5r^2} = r\sqrt{5}$ $d^2 = a_d \cdot a$

$a_d = \dfrac{d^2}{a} = \dfrac{(2r)^2}{r\sqrt{5}} = \dfrac{4r^2}{r\sqrt{5}} = \dfrac{4r}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5} r\sqrt{5}$