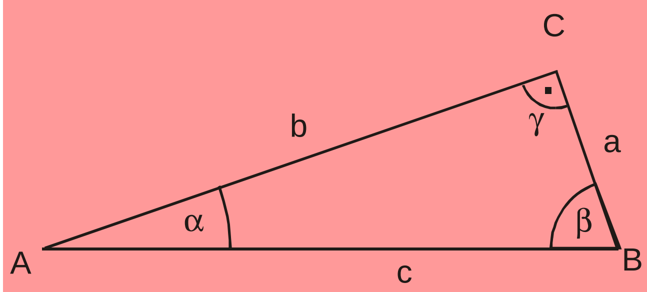
3.2.5 Pythagorova věta, Euklidovy věty I

Předpoklady: 1107, 3204

Pravoúhlý trojúhelník = trojúhelník s vnitřním úhlem $90°$ (s pravým vnitřním úhlem) $\Rightarrow$

- pravý úhel je z vnitřních úhlů největší (zbývající dva musí dát dohromady také $90°$) $\Rightarrow$ strana proti pravému úhlu je nejdelší (**přepona**), zbývající dvě jsou kratší (**odvěsny**)
- všechny pravoúhlé trojúhelníky s dalším úhlem α jsou si podobné (podle věty ***uu***) $\Rightarrow$ mají stejný tvar $\Rightarrow$ podle poměrů jejich stran zavádíme goniometrické funkce, které z úhlu tento poměr vyprodukují

Přehled goniometrických funkcí pravoúhlého trojúhelníka:



sinus: $\sin\alpha = \dfrac{protilehlá}{přepona} = \dfrac{a}{c}$

cosinus: $\cos\alpha = \dfrac{přilehlá}{přepona} = \dfrac{b}{c}$

tangens: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{protilehlá}{přilehlá} = \dfrac{a}{b}$

kotangens: $\mathrm{cotg}\,\alpha = \dfrac{přilehlá}{protilehlá} = \dfrac{b}{a}$

Pro strany pravoúhlého trojúhelníka platí:

Pythagorova věta:

V každém pravoúhlém trojúhelníku *ABC* s přeponou *c* a odvěsnami *a, b* platí vztah mezi jejich velikostmi $c^2 = a^2 + b^2$

Platí i věta obrácená:

Věta obrácená k větě Pythagorově:

Pokud v trojúhelníku *ABC* platí pro délky stran vztah $c^2 = a^2 + b^2$**, je tento trojúhelník pravoúhlý s přeponou *c*.**

Př. 1: Urči strany a vnitřní úhly pravoúhlého trojúhelníka s úhlem $\alpha = 32°$ a přeponou $c = 12$.

c je přepona $\Rightarrow$ $\gamma = 90°$ ´
$\beta = 90° - \alpha = 90° - 32° = 58°$

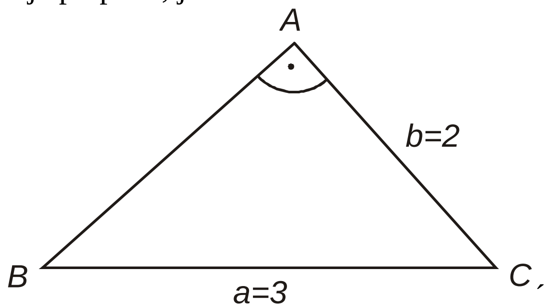
$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \sin\alpha \cdot c = \sin 32° \cdot 12 = 6,36$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \cos\alpha \cdot c = \cos 32° \cdot 12 = 10,18$

Odvěsny trojúhelníka *ABC* mají velikosti $a = 6,36$ a $b = 10,18$, jeho vnitřní úhly pak $\beta = 58°$ a $\gamma = 90°$.

Př. 2: V pravoúhlém trojúhelníku s přeponou $a = 3$ platí $b = 2$. Urči zbývající stranu a vnitřní úhly trojúhelníka.

a je přepona, jde o nestandardní situaci $\Rightarrow$ raději si nakreslíme obrázek



Z obrázku vidíme, že platí:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

$\sin\beta = \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \beta = 41°49'$

$\cos\gamma = \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \gamma = 48°11'$

Strana *c* má velikost $\sqrt{5}$, vnitřní úhly $\beta = 41°49'$ a $\gamma = 48°11'$.

Př. 3: Urči, která ze trojic čísel určuje délky stran pravoúhlého trojúhelníku:
a) $4,5,6$ b) $5,12,13$ c) $2,\sqrt{6},3$

Dosadíme do Pytharogovy věty a zjistíme zda vyjde:

a) $4,5,6$

$4^2 + 5^2 = 6^2$

$16 + 25 = 44 \neq 36 \Rightarrow$ trojúhelník není pravoúhlý

b) $5,12,13$

$5^2 + 12^2 = 13^2$

$25 + 144 = 169 \Rightarrow$ trojúhelník je pravoúhlý

c) $2,\sqrt{6},3$

$2^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 = 3^2$

$4 + 6 = 10 \neq 9 \Rightarrow$ trojúhelník není pravoúhlý

Př. 4: Rozhodni, zda každý trojúhelník o stranách $2n$, n^2+1, n^2-1 je pravoúhlý. Která z uvedených stran je jeho přeponou?

Za n můžeme dosazovat pouze čísla větší než 1 (aby výraz n^2-1 byl kladný) $\Rightarrow$ číslo n^2+1 je největší a určuje tedy délku přepony.
Stejný postup jako v předchozím případě, ale dosazujeme výrazy místo konkrétních čísel:

$$(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2$$

$$4n^2+n^4-2n^2+1=n^4+2n^2+1$$

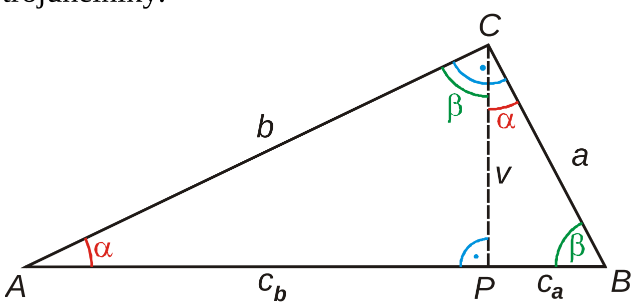
$$0=0$$

Každý trojúhelník o stranách $2n$, n^2+1, n^2-1, kde $n\geq 2$ je pravoúhlý.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklady jsou pouhým opakováním. Jejich řešení je potřebu utnout tak, aby na zbytek hodiny zbývalo minimálně 25 minut času.

Pedagogická poznámka: Podobnost trojúhelníků na následujících obrázcích jsme dokazovali v předminulé hodině. Euklidovu větu o výšce odvozuji sám, zbývající dvě nechávám částečně na studentech.

V pravoúhlém trojúhelníku platí i další vztahy pro velikosti stran:
Výška v_C (dále ji budeme značit pouze *v*) rozdělí pravoúhlý trojúhelník *ABC* na dva další trojúhelníky.

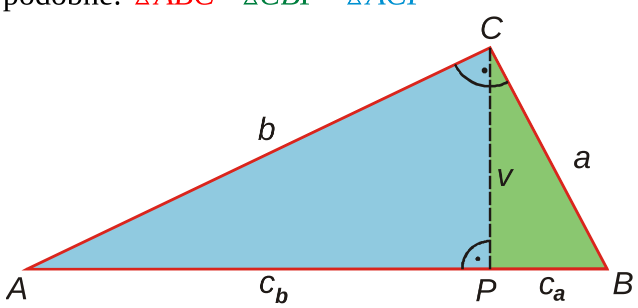


Bod *P* rozdělil přeponu *c* na dva úseky, které značíme podle přilehlé odvěsny:

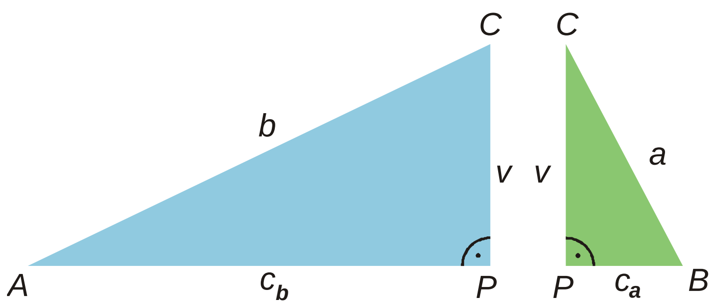
- $AP=c_b$ - úsek přepony přilehlý ke straně *b*
- $BP=c_a$ - úsek přepony přilehlý ke straně *a*

(index u úseků přepony je značen malým písmenem $\Rightarrow$ týká se strany ne vrcholu)

Platí $\alpha+\beta+90°=180°\Rightarrow\alpha=90°-\beta$ $\Rightarrow$ všechny tři nakreslené trojúhelníky jsou si podobné: $\triangle ABC\sim\triangle CBP\sim\triangle ACP$



Vybereme si vždy dvojici trojúhelníků a zkusíme pomocí podobnosti objevit nějaké vztahy mezi stranami.
$\triangle CBP\sim\triangle ACP$

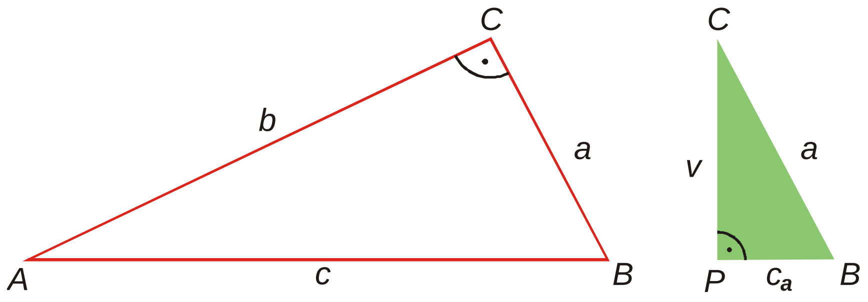


$$\frac{\textit{kratší odvěsna}}{\textit{delší odvěsna}} = \frac{v}{c_b} = \frac{c_a}{v}$$

$v^2 = c_a \cdot c_b$

$v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$ **- Euklidova věta o výšce**

$\triangle ABC \sim \triangle CBP$

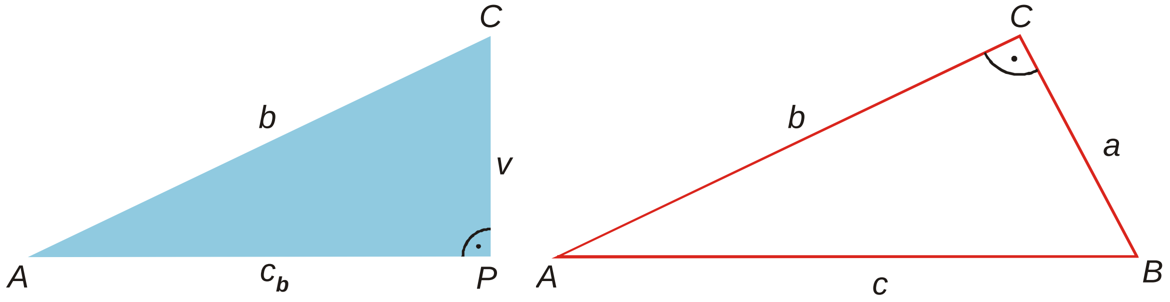


$$\frac{\textit{přepona}}{\textit{kratší odvěsna}} = \frac{c}{a} = \frac{a}{c_a}$$

$a^2 = c \cdot c_a$

$a = \sqrt{c \cdot c_a}$ **- Euklidova věta o odvěsně**

$\triangle ABC \sim \triangle ACP$



$$\frac{\textit{přepona}}{\textit{delší odvěsna}} = \frac{c}{b} = \frac{b}{c_b}$$

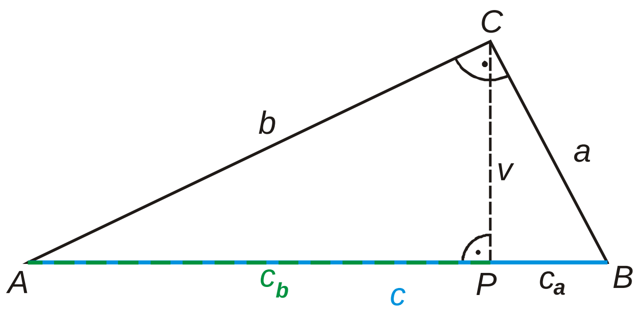
$b^2 = c \cdot c_b$

$b = \sqrt{c \cdot c_b}$ **- Euklidova věta o odvěsně**

V každém pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami *a*, *b* a přeponou *c* platí:
$a = \sqrt{c \cdot c_a}$, $b = \sqrt{c \cdot c_b}$, $v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$, kde *v* je výška na přeponu a c_a, c_b jsou úseky přepony přilehlé ke stranám *a*, *b*.

Každou z předchozích vět je možné vyslovit i geometricky. Například věta o výšce $v=\sqrt{c_a \cdot c_b}$: **Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníka se rovná obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseku přepony.**

Př. 5: Vypočítej zbývající prvky (a, b, c_b, v, α, β) v pravoúhlém trojúhelníku ABC $(\gamma=90°)$, je-li dáno: $c=10$, $c_b=6$.



$b=\sqrt{c \cdot c_b}=\sqrt{10 \cdot 6}=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$

$c=c_a+c_b \Rightarrow c_a=c-c_b=10-6=4$

$a=\sqrt{c \cdot c_a}=\sqrt{10 \cdot (10-6)}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}\text{ cm}$

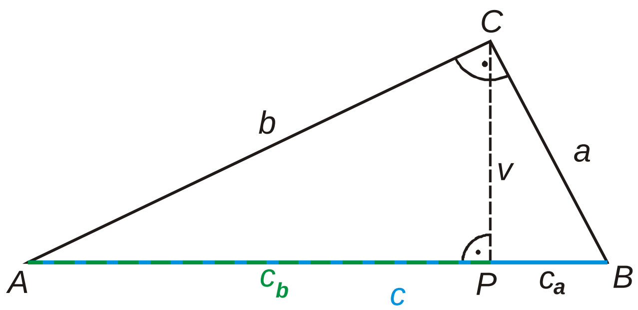
$v=\sqrt{c_a \cdot c_b}=\sqrt{4 \cdot 6}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}\text{ cm}$

$\sin\alpha=\dfrac{a}{c}=\dfrac{2\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha=39°14'$

$\sin\beta=\dfrac{b}{c}=\dfrac{2\sqrt{15}}{10} \Rightarrow \beta=50°46'$

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu doporučuji studentům, aby si nakreslili obrázek a postupně do něj dopisovali údaje, které již znají. Tímto způsobem pak snáze přijdou na to, jak spočítat údaje, které zatím neznají.

Př. 6: Najdi způsob, jak zkontrolovat správnost výsledků předchozího příkladu.



Z obrázku vidíme: $c_a<c_b$, $a<b$, $\alpha<\beta$

Součet úhlů v trojúhelníku musí být $180°$.

$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow 39°14'+50°46'+90°=180°$

$180°=180°$

Pro velikosti stran musí platit Pythagorova věta:

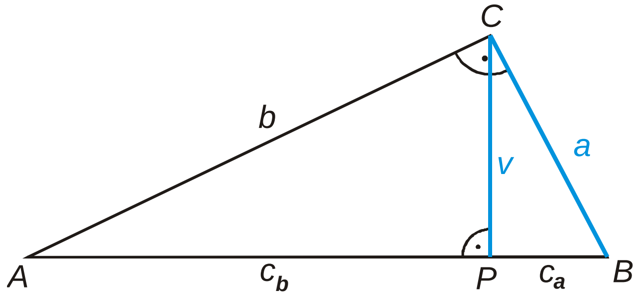
$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 10^2=\left(2\sqrt{10}\right)^2+\left(2\sqrt{15}\right)^2$

$100 = 4 \cdot 10 + 4 \cdot 15$
$100 = 100$ - platí

Pedagogická poznámka: Zdůrazňuji studentům, že při kreslení obrázku je dobré zachovat podstatné rysy (pravý úhel), přehánět rozdíly (velikosti c_b a c_a) a nepřidávat další vlastnosti (hodně studentů, kreslí trojúhelníky zásadně pouze rovnoramenné).
Z takto nakresleného obrázku je možné hodně vyčíst, jak je ukázáno v předchozím příkladě.

Př. 7: Vypočítej zbývající prvky (b, c, c_a, c_b, α, β) v pravoúhlém trojúhelníku ABC $(\gamma = 90°)$, je-li dáno: $a = 3$, $v = \sqrt{5}$.

Zadání neumožňuje přímé dosazení do žádného ze vzorců. Nakreslíme si obrázek:



Z pravoúhlého trojúhelníku CBP můžeme pomocí Pythagorovy věty spočítat úsek přepony c_a.

$$c_a^2 = a^2 - v^2 = 3^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 4 \Rightarrow c_a = 2$$

$$a^2 = c \cdot c_a \Rightarrow c = \frac{a^2}{c_a} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$c = c_a + c_b \Rightarrow c_b = c - c_a = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$$

$$b = \sqrt{c \cdot c_b} = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{\frac{9}{2}} \Rightarrow \alpha = 41°49'$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{5}}{\frac{9}{2}} \Rightarrow \beta = 48°11'$$

Př. 8: Petáková:
strana 87/cvičení 37

Shrnutí: Z podobnosti trojúhelníků, které vytvoří výška v pravoúhlém trojúhelníku, odvodíme vzorce pro výšku a odvěsny.