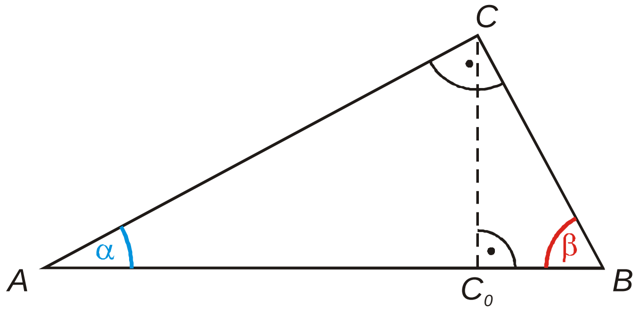
3.2.4 Podobnost trojúhelníků II

Předpoklady: 3203

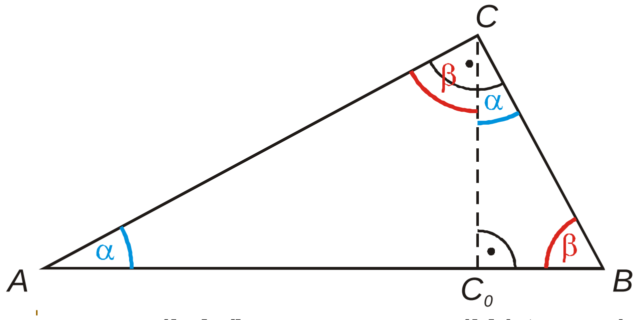
Př. 1: V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* s pravým uhlem při vrcholu *C* sestroj výšku na stranu *C*. Patu výšky označ C_0. Najdi podobné trojúhelníky.

Nakreslíme si obrázek:



Nemáme žádné informace o délce stran $\Rightarrow$ pokud se nám podaří dokázat podobnost, zřejmě pouze pomocí úhlů $\Rightarrow$ do obrázku doplníme ostatní úhly:
Pro součet úhlů v trojúhelníku *ABC* platí: $\alpha+\beta+90°=180° \Rightarrow \alpha+\beta=90° \Rightarrow$

- $\alpha=90°-\beta$
- $\beta=90°-\alpha$



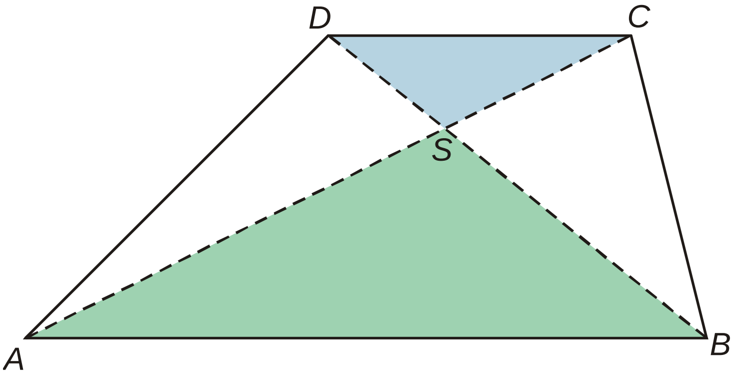
- Trojúhelník ACC_0 je pravoúhlý (s pravým úhlem u vrcholu C_0) $\Rightarrow$ pro úhel u vrcholu *C* musí platit: $180°=\alpha+\sphericalangle ACC_0+90° \Rightarrow \sphericalangle ACC_0=90°-\alpha=\beta \Rightarrow$ trojúhelník je podobný trojúhelníku *ABC* podle věty ***uu***.
- Trojúhelník BCC_0 je také pravoúhlý (s pravým úhlem u vrcholu C_0) $\Rightarrow$ pro úhel u vrcholu *C* musí platit: $180°=\beta+\sphericalangle BCC_0+90° \Rightarrow \sphericalangle BCC_0=90°-\beta=\alpha \Rightarrow$ trojúhelník je podobný trojúhelníku *ABC* podle věty ***uu***.

$\Rightarrow$ oba malé trojúhelníky jsou podobné trojúhelníku *ABC* a sobě navzájem $\Rightarrow$ zapíšeme podobnost (pořadí dodržujeme podle úhlů v pořadí $\alpha\beta 90°$) $\Rightarrow$
$ABC \sim ACC_0 \sim BCC_0$

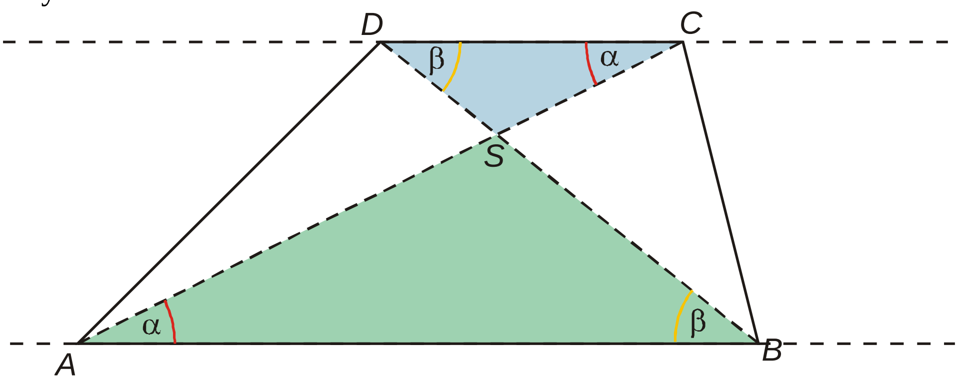
Pedagogická poznámka: Je dobré zkontrolovat studenty a připomenout jim, že obrázek, který si kreslí by jim měl pomáhat a proto by odvěsny trojúhelníka měly mít rozdílné délky, aby bylo ihned poznat, které strany u podobných trojúhelníků si odpovídají. Bavíme se o tomto problému jako o obecné radě do budoucna.

Př. 2: Je dán libovolný lichoběžník *ABCD* se základnou *AB*. Průsečík jeho úhlopříček je označen *S*. Rozhodni, zda platí $\triangle ABS \sim \triangle DCS$.

Nakreslíme si obrázek:



Nemáme žádné informace o délkách stran $\Rightarrow$ hledáme ve vyznačených trojúhelnících stejné úhly:



Přímky *AB* a *CD* jsou rovnoběžné $\Rightarrow$

- $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SCD = \alpha$ (střídavé úhly)
- $\sphericalangle SBA = \sphericalangle SDC = \beta$ (střídavé úhly)

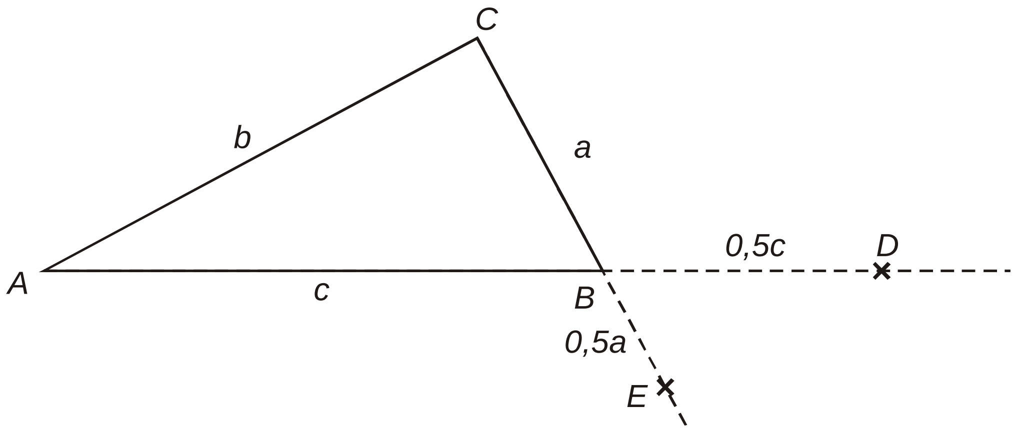
$\Rightarrow$ vyznačené trojúhelníky jsou si podobné podle věty ***uu*** (platí i $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$ jde o vrcholové úhly)

zkontrolujeme pořadí vrcholů: $\triangle ABS \sim \triangle CDS$ $\Rightarrow$

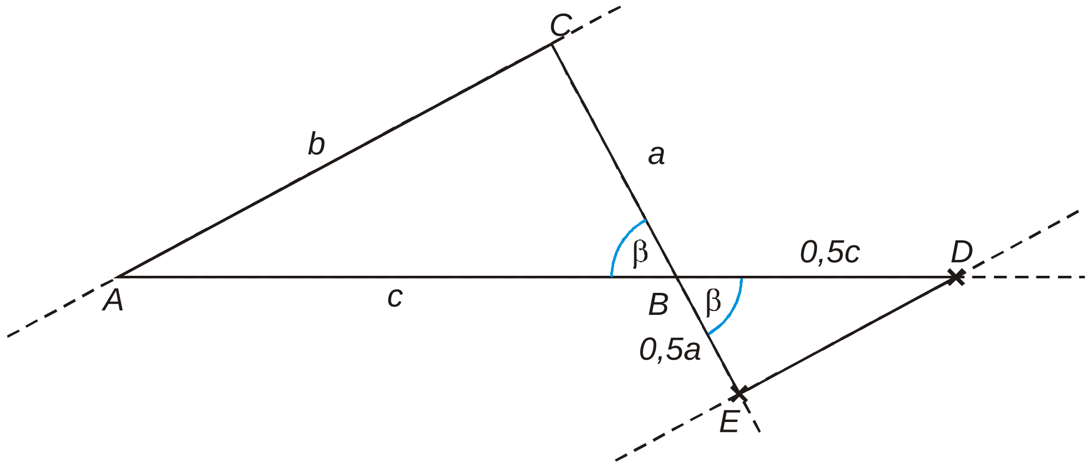
Neplatí $\triangle ABS \sim \triangle DCS$, platí $\triangle ABS \sim \triangle CDS$.

Př. 3: Je dán trojúhelník *ABC*. Na polopřímce *AB* je zvolen za bodem *B* bod *D* tak, aby platilo $|BD| = 0,5|AB|$. Na polopřímce *CB* je zvolen za bodem *B* bod *E* tak, aby platilo $|BE| = 0,5|BC|$. Dokaž, že platí:

a) $|DE| = 0,5|AC|$ b) $DE \parallel AC$



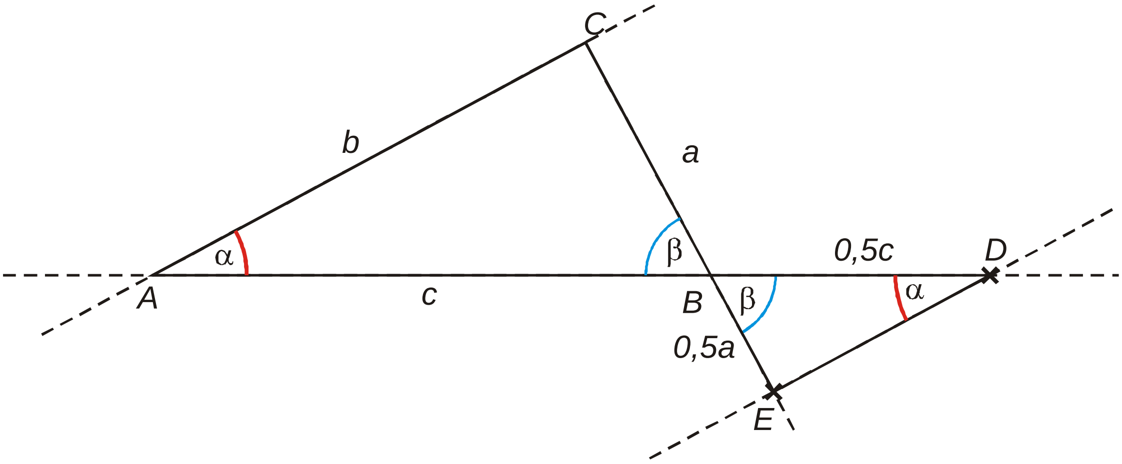
Zdá se, že trojúhelník *BDE* je podobný s trojúhelníkem *ABC* s koeficientem 0,5, pak by platil i vztah $|DE| = 0,5|AC|$.



Platí: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DBE = \beta$ (vrcholové úhly) $\Rightarrow$ $\triangle DCE \sim \triangle ABC$ s $k = 0,5 \Rightarrow$ $|DE| = 0,5|AC|$

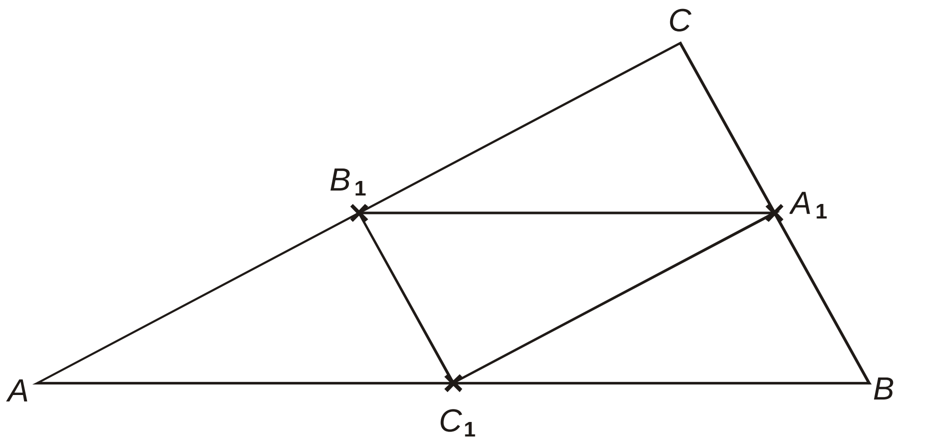
Jak dokážeme $DE \parallel AC$?

$\triangle DCE \sim \triangle ABC$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle CAB = \sphericalangle EDB = \alpha$ (odpovídající si úhly podobných trojúhelníků) $\Rightarrow$ přímka *AD* svírá stejný úhel s přímkami *AC* a *ED* $\Rightarrow$ jde o rovnoběžky proťaté příčkou $\Rightarrow$ $DE \parallel AC$

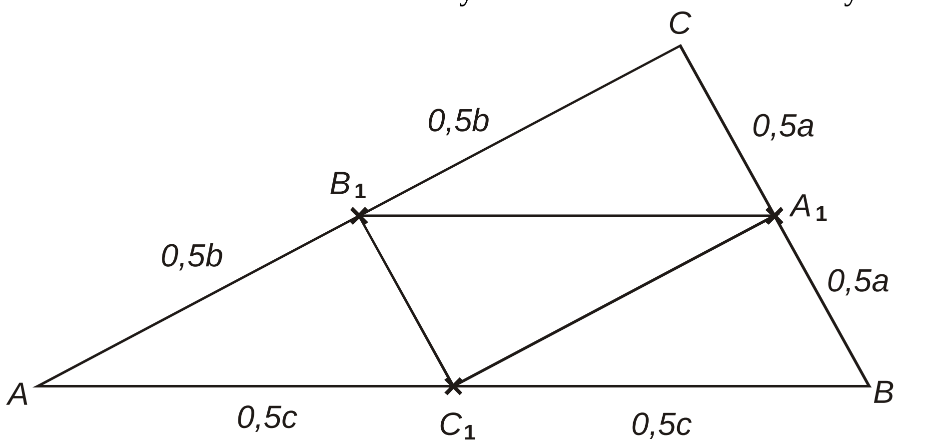


Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu je třeba zkontrolovat, zda si studenti dokázali podle zadání nakreslit správný trojúhelník.

Př. 4: Střední příčky rozdělí trojúhelník ABC na čtyři menší trojúhelníky. Které z nich jsou podobné s původním trojúhelníkem ABC?



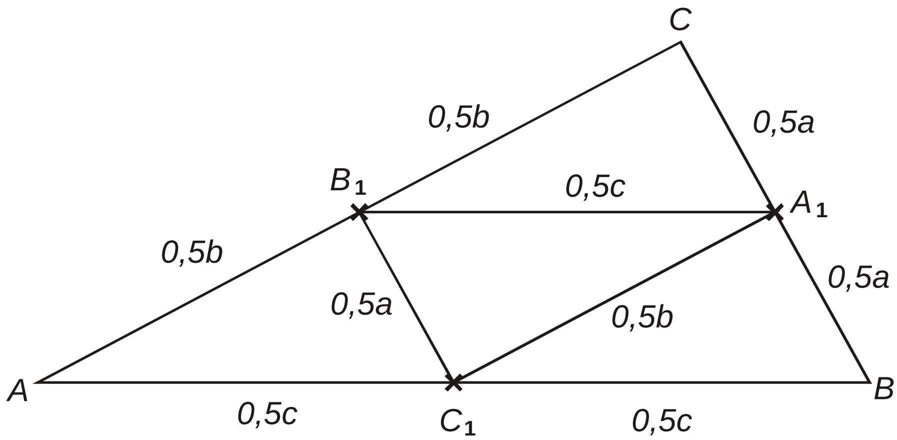
Dokreslíme do obrázku známe délky všech stran a velikosti známých úhlů:



z obrázku ihned vidíme:

- $\triangle AC_1B_1 \sim \triangle ABC$ podle věty ***sus***: (vyznačené strany a stejný úhel $\sphericalangle CAB = \alpha$)
- $\triangle C_1A_1B \sim \triangle ABC$ podle věty ***sus***: (vyznačené strany a stejný úhel $\sphericalangle CBA = \beta$)
- $\triangle B_1A_1C \sim \triangle ABC$ podle věty ***sus***: (vyznačené strany a stejný úhel $\sphericalangle ACB = \gamma$)

tím jsme určili i délky ostatních stran v obrázku:



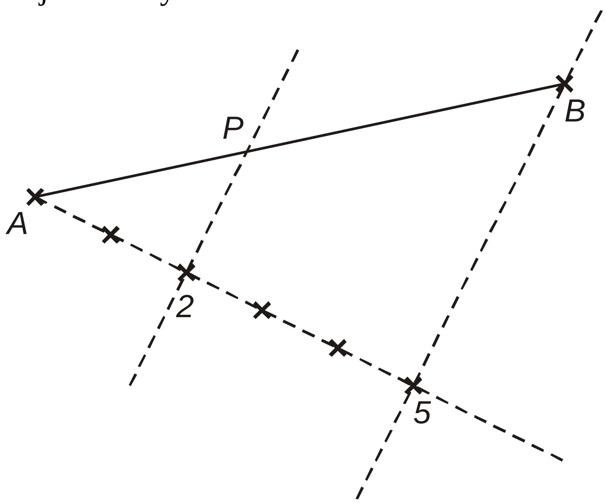
$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ podle věty ***sss***: (vyznačené strany)

Pedagogická poznámka: Na probrání následujících tří příkladů je třeba minimálně polovina vyučovací hodiny, proto se většina třídy k předchozímu příkladu vůbec nedostane.

Pedagogická poznámka: Většina studentů sice následující příklad na základní škole řešila, ale na postup si nevzpomene. Proto nemá cenu čekání příliš prodlužovat. Ukazuji jim oba způsoby, u obou většinou stačí, abych nakreslil na tabuli pomocnou polopřímku (polopřímky) a zbytek řešení studenti objeví sami.

Př. 5: Najdi způsob jak danou úsečku *AB* rozdělit v poměru 2:3 bez použití měřítka.

Nakreslíme libovolnou přímku procházející bodem *A* a vyznačíme na ní pět libovolných stejně dlouhých úseků.

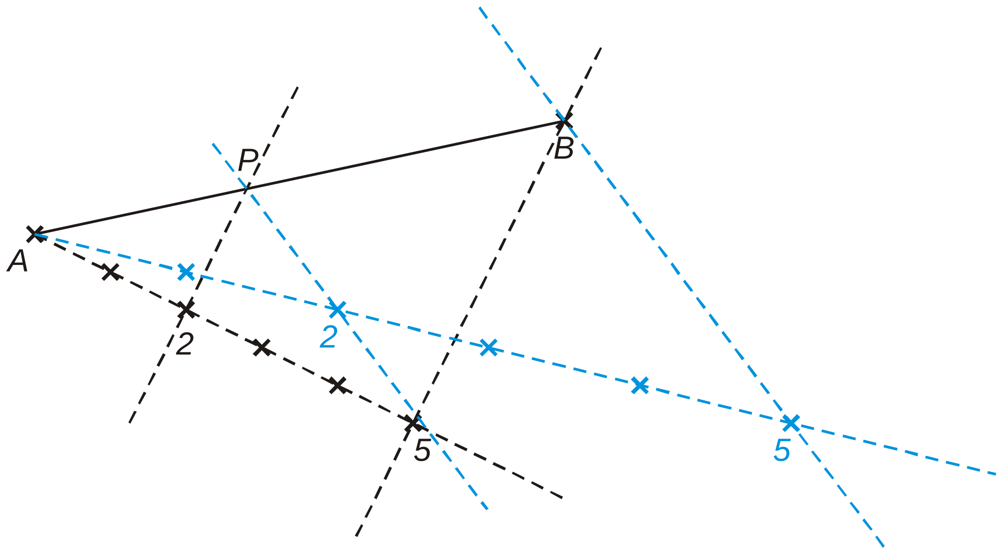


Pro rozdělení úsečky využijeme podobnost trojúhelníků:

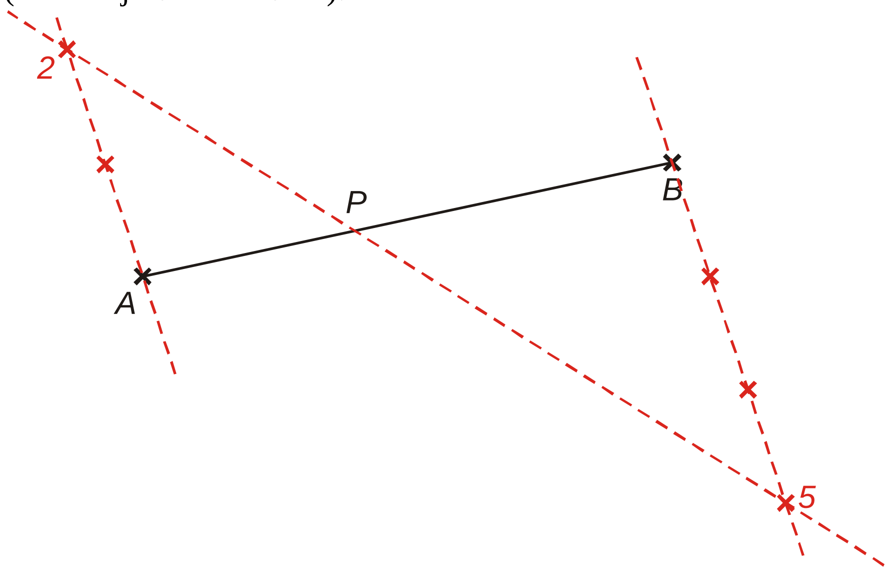
$\triangle A2P \sim \triangle A5B$ (podle věty ***uu***) v poměru $2:5$ (podle poměru stran $\frac{|A2|}{|A5|}$) $\Rightarrow$ $|AP| = \frac{2}{5}|AB|$

$\Rightarrow |AP| = \frac{2}{3}|PB|$.

Že výsledek nezávisí na volbě pomocné přímky ani velikosti dílku na ní je vidět z obrázku:

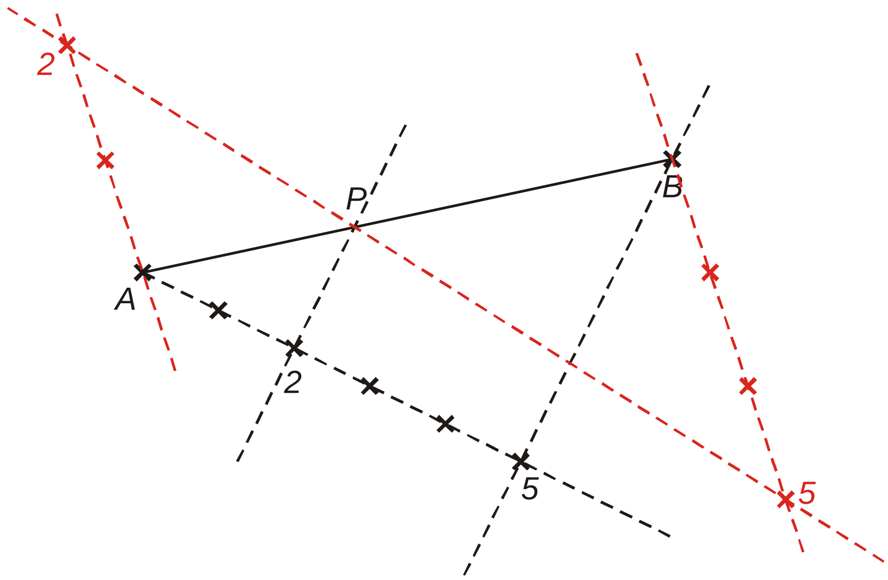


Využití podobnosti můžem být i ještě přímočařejší, když si pomocné přímky nakreslíme dvě (samozřejmě rovnoběžné):

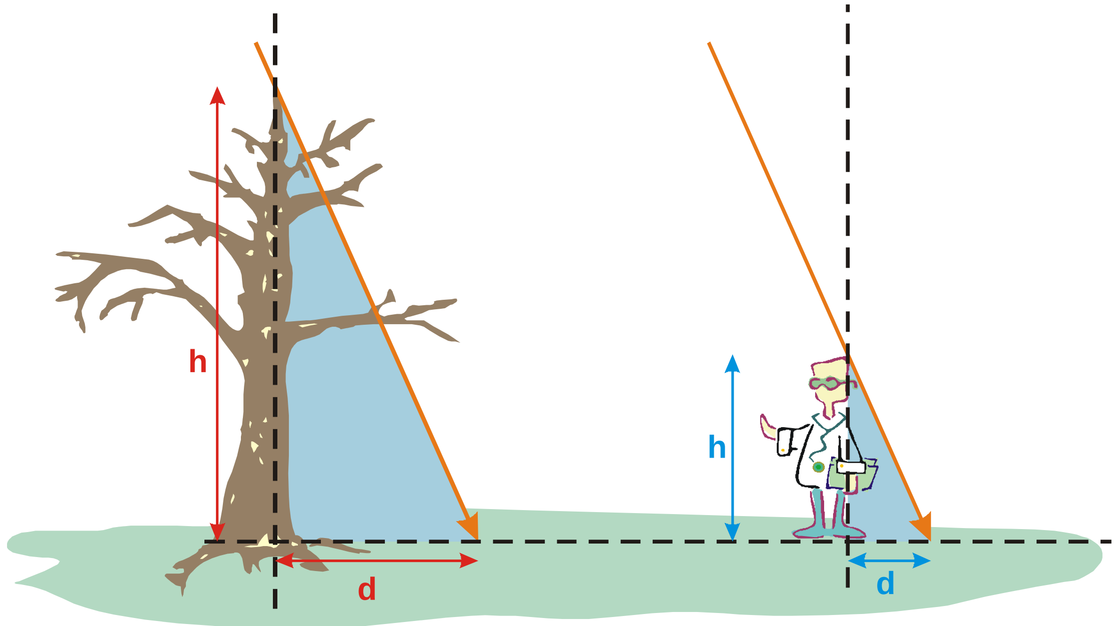


$\triangle A2P \sim \triangle B5B$ (podle věty ***uu***) v poměru $2:3$ (podle poměru stran $\frac{|A2|}{|B5|}$) $\Rightarrow$ $|AP| = \frac{2}{3}|PB|$.

Z následujícího obrázku je zřejmé, že získáme stejné řešení jako při použití první metody:

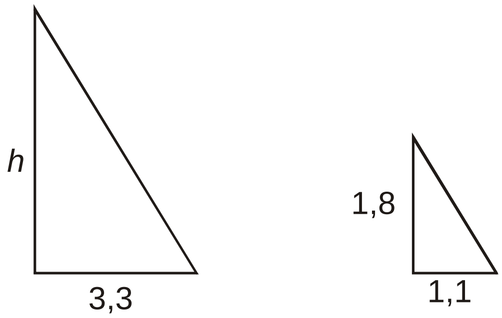


Př. 6: Vymysli způsob, jak pomocí stínu měřit výšku předmětů.



Metoda je zřejmá z obrázku: v jednom okamžiku mají sluneční paprsky na jenom místě Země stejný směr. sluneční paprsek tak spolu se svislicí a délkou stínu vytvoří podobné trojúhelníky $\Rightarrow$ pokud známe u jednoho předmětu jeho výšku a délku stínu,můžeme pomocí podobnosti spočítat výšku libovolného předmětu, u kterého změříme délku stínu ve stejném okamžiku.

Př. 7: Člověk vysoký 1,8 m vrhá stín o délce 1,1 m. Jaká je výška stromu, jehož stín měl ve stejném okamžiku délku 3,3 m. Rovnici pro výpočet výšky stromu sestav:
a) na základě poměrů mezi odpovídajícími si stranami obou trojúhelníků
b) na základě poměrů mezi stranami jednoho trojúhelníka



a) na základě poměrů mezi odpovídajícími si stranami obou trojúhelníků

$$\frac{h}{1,8}=\frac{3,5}{1,1} \Rightarrow h=\frac{3,3}{1,1}\cdot 1,8\,\mathrm{m}=5,4\,\mathrm{m}$$

b) na základě poměrů mezi stranami jednoho trojúhelníka

$$\frac{h}{3,3}=\frac{1,8}{1,1} \Rightarrow h=\frac{1,8}{1,1}\cdot 3,3\,\mathrm{m}=5,4\,\mathrm{m}$$

Strom je vysoký 5,4 m.

Př. 8: Trojúhelníky *ABC* a *KLM* jsou si podobné s koeficientem podobnosti $k=2$. Urči poměr jejich obsahů.

Trojúhelníky *ABC* a *KLM* jsou si podobné s koeficientem podobnosti $k=2 \Rightarrow$ všechny vzdálenosti naměřené v trojúhelníku *KLM* jsou dvakrát větší než odpovídající vzdálenosti v trojúhelníku *ABC*.

$$S_{ABC}=\frac{a\cdot v_a}{2}$$

$$S_{KLM}=\frac{k\cdot v_k}{2}=\frac{2a\cdot 2v_a}{2}=4\cdot\frac{a\cdot v_a}{2}=4S_{ABC}$$

Obsah trojúhelníku *KLM* je čtyřikrát větší než obsah trojúhelníku *ABC*.

Stejný efekt známe z převodů jednotek. Platí například $1\,\mathrm{m}=10\,\mathrm{dm}$, ale $10\,\mathrm{m}=100\,\mathrm{dm}$.
Objem roste s třetí mocninou a proto pokud se hrana krychle zvětší dvakrát její objem se zvětší osmkrát.
Rychlý růst objemu s velikostí má mnoho důsledků. Například je důvodem, proč se mravenec při pádu z výšky na rozdíl od člověka nezabije, nebo proč vítr zdvihá písek, ale ne dlažební kostky (i když jde o stejný materiál).

Př. 9: Petáková:
strana 86/cvičení 23
strana 86/cvičení 25

Shrnutí: