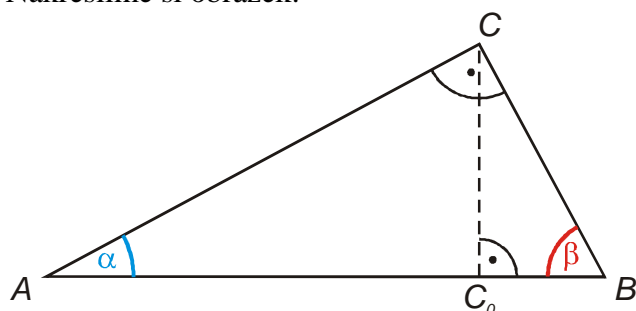


3.2.4 Podobnost trojúhelníků II

Předpoklady: 3203

Př. 1: V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C sestroj výšku na stranu AB . Patu výšky označ C_0 . Najdi podobné trojúhelníky.

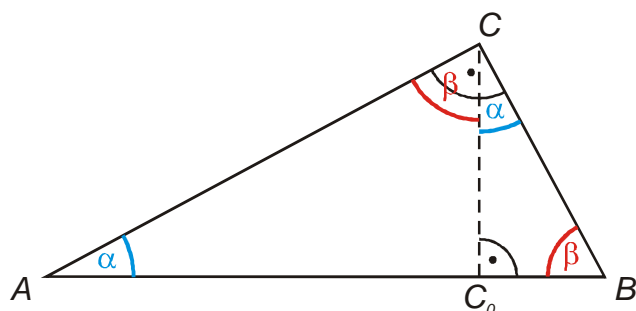
Nakreslíme si obrázek:



Nemáme žádné informace o délce stran \Rightarrow pokud se nám podaří dokázat podobnost, zřejmě pouze pomocí úhlů \Rightarrow do obrázku doplníme ostatní úhly:

Pro součet úhlů v trojúhelníku ABC platí: $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow$

- $\alpha = 90^\circ - \beta$
- $\beta = 90^\circ - \alpha$



- Trojúhelník ACC_0 je pravoúhlý (s pravým úhlem u vrcholu C_0) \Rightarrow pro úhel u vrcholu C musí platit: $180^\circ = \alpha + \sphericalangle ACC_0 + 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle ACC_0 = 90^\circ - \alpha = \beta \Rightarrow$ trojúhelník je podobný trojúhelníku ABC podle věty uu_2 .
- Trojúhelník BCC_0 je také pravoúhlý (s pravým úhlem u vrcholu C_0) \Rightarrow pro úhel u vrcholu C musí platit: $180^\circ = \beta + \sphericalangle BCC_0 + 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle BCC_0 = 90^\circ - \beta = \alpha \Rightarrow$ trojúhelník je podobný trojúhelníku ABC podle věty uu_2 .

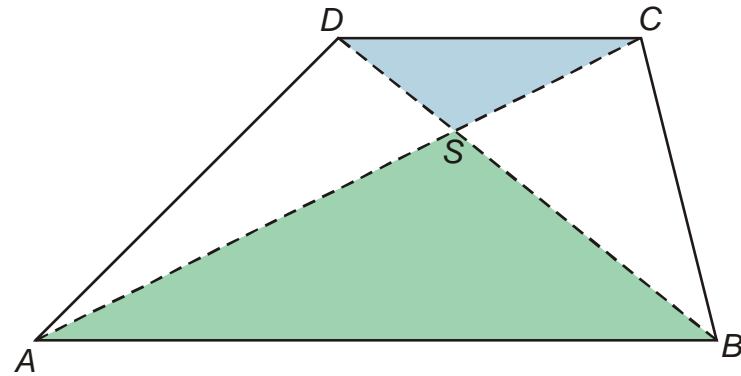
\Rightarrow oba malé trojúhelníky jsou podobné trojúhelníku ABC a sobě navzájem \Rightarrow zapíšeme podobnost (pořadí dodržujeme podle úhlů v pořadí $\alpha\beta 90^\circ$) \Rightarrow

$$ABC \sim ACC_0 \sim BCC_0$$

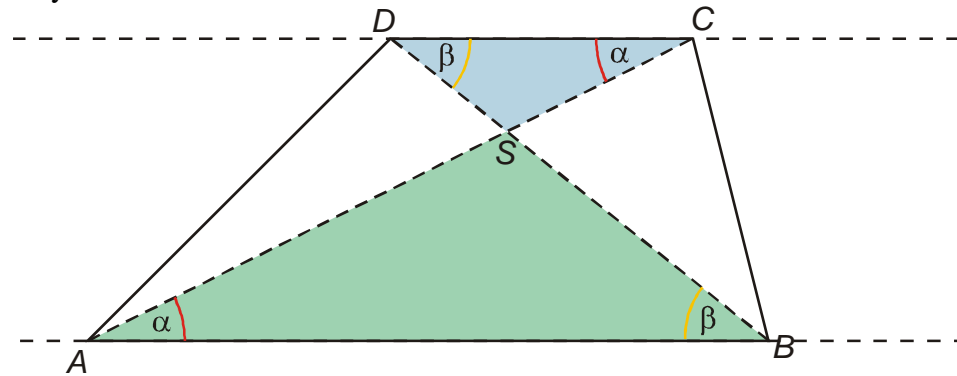
Pedagogická poznámka: Je dobré zkontrolovat studenty a připomenout jim, že obrázek, který si kreslí by jim měl pomáhat a proto by odvěsny trojúhelníka měly mít rozdílné délky, aby bylo ihned poznat, které strany u podobných trojúhelníků si odpovídají. Bavíme se o tomto problému jako o obecné radě do budoucna.

Př. 2: Je dán libovolný lichoběžník $ABCD$ se základnou AB . Průsečík jeho úhlopříček je označen S . Rozhodni, zda platí $\triangle ABS \sim \triangle DCS$.

Nakreslíme si obrázek:



Nemáme žádné informace o délkách stran \Rightarrow hledáme ve vyznačených trojúhelnících stejné úhly:



Přímky AB a CD jsou rovnoběžné \Rightarrow

- $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SCD = \alpha$ (střídavé úhly)
- $\sphericalangle SBA = \sphericalangle SDC = \beta$ (střídavé úhly)

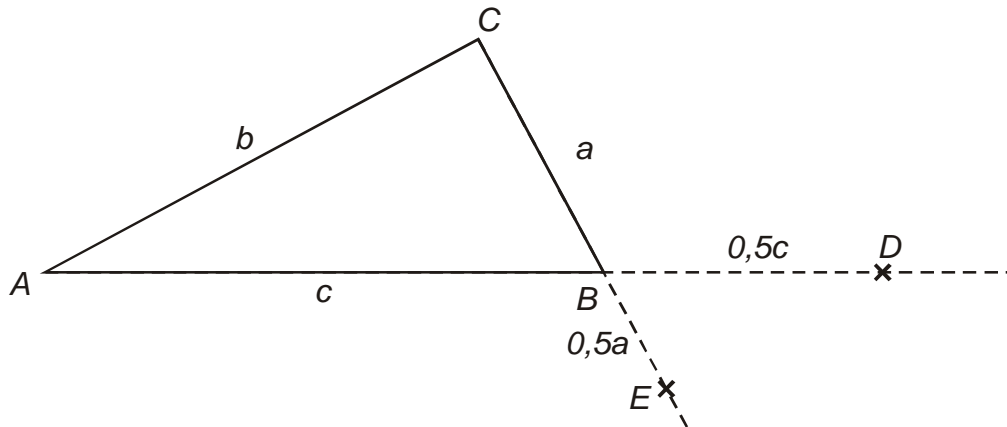
\Rightarrow vyznačené trojúhelníky jsou si podobné podle věty **uu** (platí i $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$ jde o vrcholové úhly)

zkontrolujeme pořadí vrcholů: $\triangle ABS \sim \triangle CDS \Rightarrow$

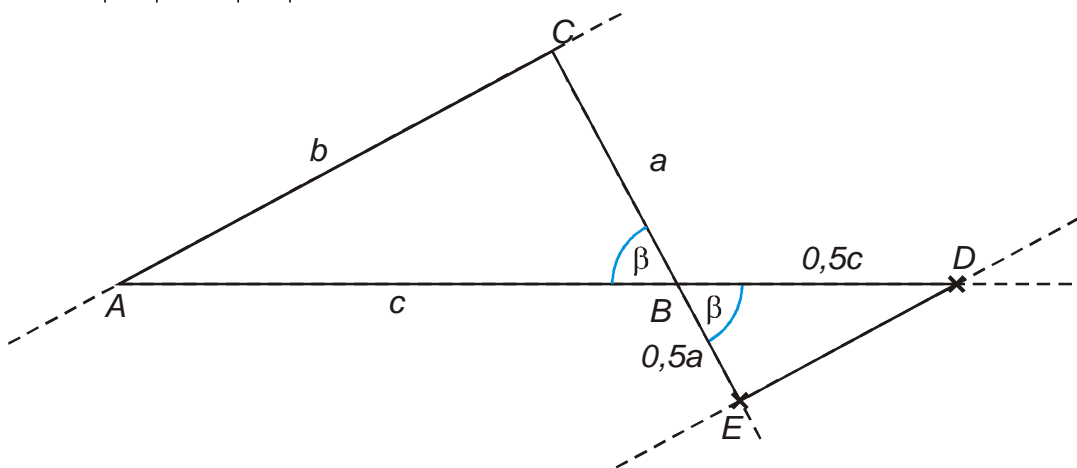
Neplatí $\triangle ABS \sim \triangle DCS$, platí $\triangle ABS \sim \triangle CDS$.

Př. 3: Je dán trojúhelník ABC . Na polopřímce AB je zvolen za bodem B bod D tak, aby platilo $|BD| = 0,5|AB|$. Na polopřímce CB je zvolen za bodem B bod E tak, aby platilo $|BE| = 0,5|BC|$. Dokaž, že platí:

- a) $|DE| = 0,5|AC|$ b) $DE \parallel AC$



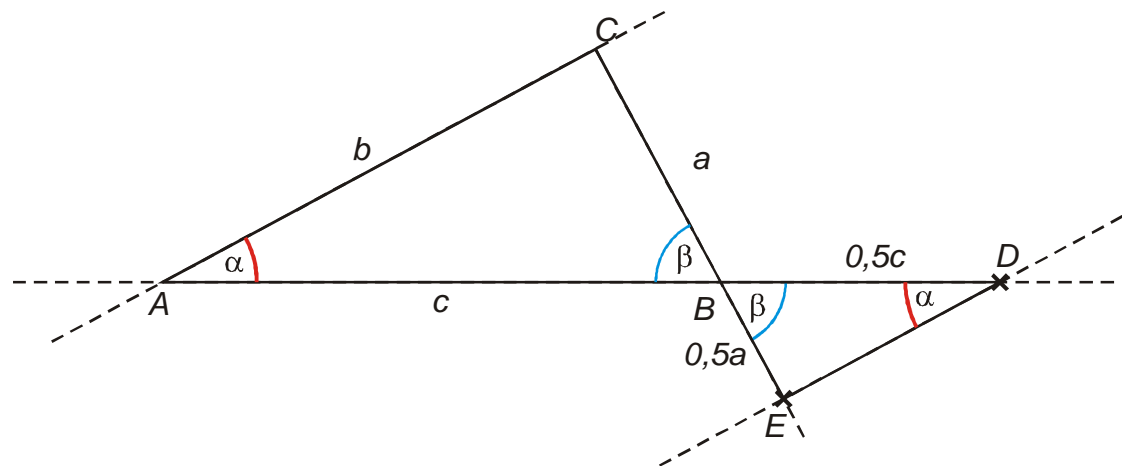
Zdá se, že trojúhelník BDE je podobný s trojúhelníkem ABC s koeficientem $0,5$, pak by platil i vztah $|DE| = 0,5|AC|$.



Platí: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DBE = \beta$ (vrcholové úhly) $\Rightarrow \triangle DCE \sim \triangle ABC$ s $k = 0,5 \Rightarrow |DE| = 0,5|AC|$

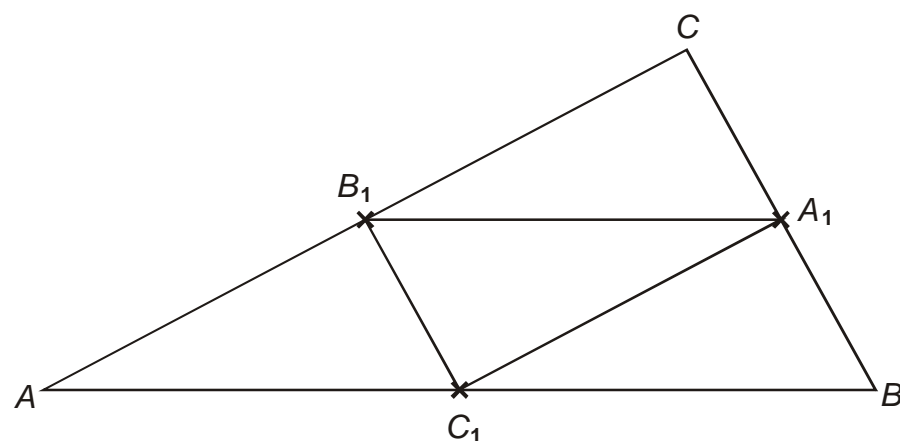
Jak dokážeme $DE \parallel AC$?

$\triangle DCE \sim \triangle ABC \Rightarrow \sphericalangle CAB = \sphericalangle EDB = \alpha$ (odpovídající si úhly podobných trojúhelníků) \Rightarrow přímka AD svírá stejný úhel s přímkami AC a $ED \Rightarrow$ jde o rovnoběžky protažené příčkou $\Rightarrow DE \parallel AC$

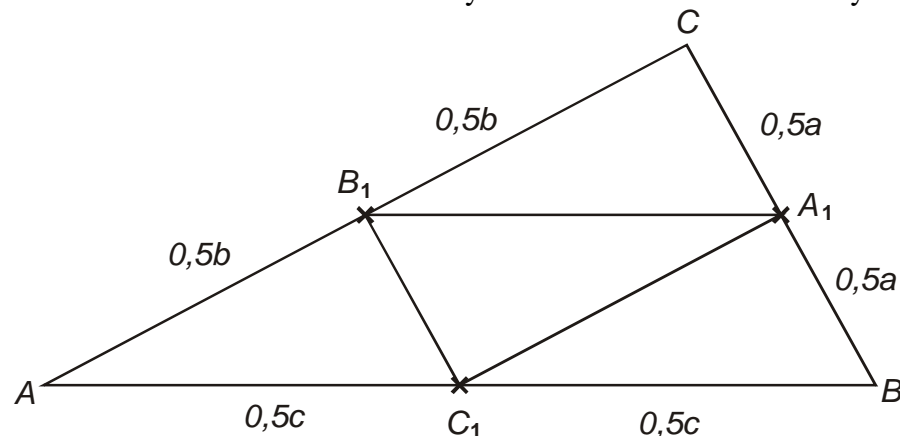


Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu je třeba zkontrolovat, zda si studenti dokázali podle zadání nakreslit správný trojúhelník.

Př. 4: Střední příčky rozdělí trojúhelník ABC na čtyři menší trojúhelníky. Které z nich jsou podobné s původním trojúhelníkem ABC ?



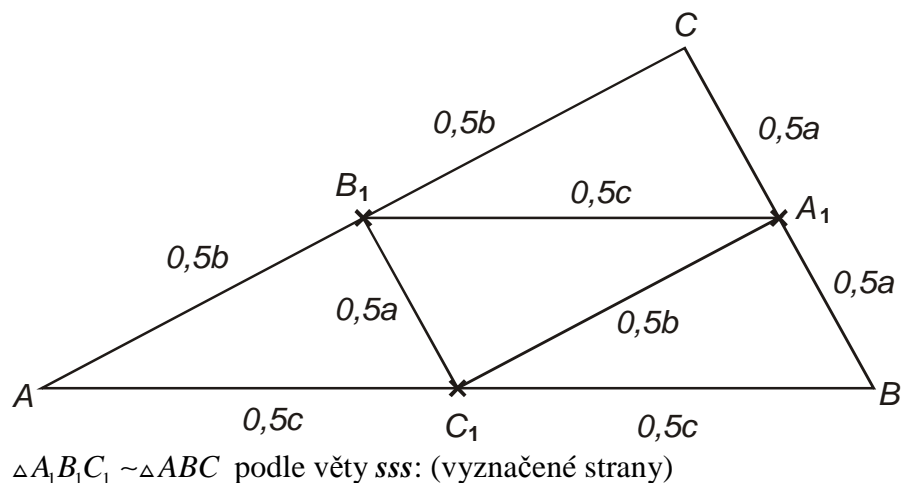
Dokreslíme do obrázku známe délky všech stran a velikosti známých úhlů:



z obrázku ihned vidíme:

- $\triangle AC_1B_1 \sim \triangle ABC$ podle věty *sus*: (vyznačené strany a stejný úhel $\sphericalangle CAB = \alpha$)
- $\triangle C_1A_1B \sim \triangle ABC$ podle věty *sus*: (vyznačené strany a stejný úhel $\sphericalangle CBA = \beta$)
- $\triangle B_1A_1C \sim \triangle ABC$ podle věty *sus*: (vyznačené strany a stejný úhel $\sphericalangle ACB = \gamma$)

tím jsme určili i délky ostatních stran v obrázku:

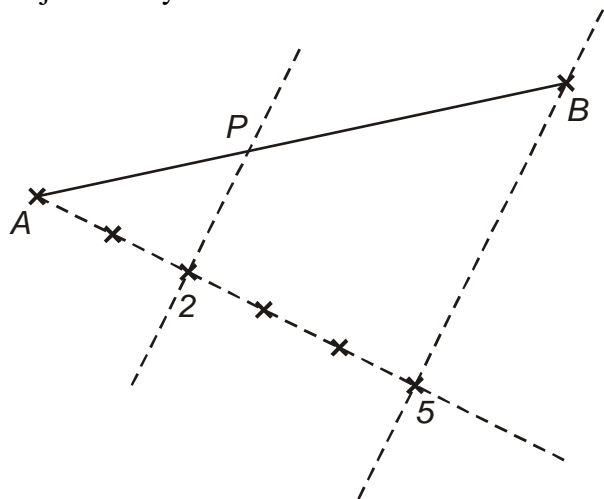


Pedagogická poznámka: Na probrání následujících tří příkladů je třeba minimálně polovina vyučovací hodiny, proto se většina třídy k předchozímu příkladu vůbec nedostane.

Pedagogická poznámka: Většina studentů sice následující příklad na základní škole řešila, ale na postup si nevzpomene. Proto nemá cenu čekání příliš prodlužovat. Ukazují jim oba způsoby, u obou většinou stačí, abych nakreslil na tabuli pomocnou polopřímku (polopřímky) a zbytek řešení studenti objeví sami.

Př. 5: Najdi způsob jak danou úsečku AB rozdělit v poměru 2:3 bez použití měřítka.

Nakreslíme libovolnou přímku procházející bodem A a vyznačíme na ní pět libovolných stejně dlouhých úseků.

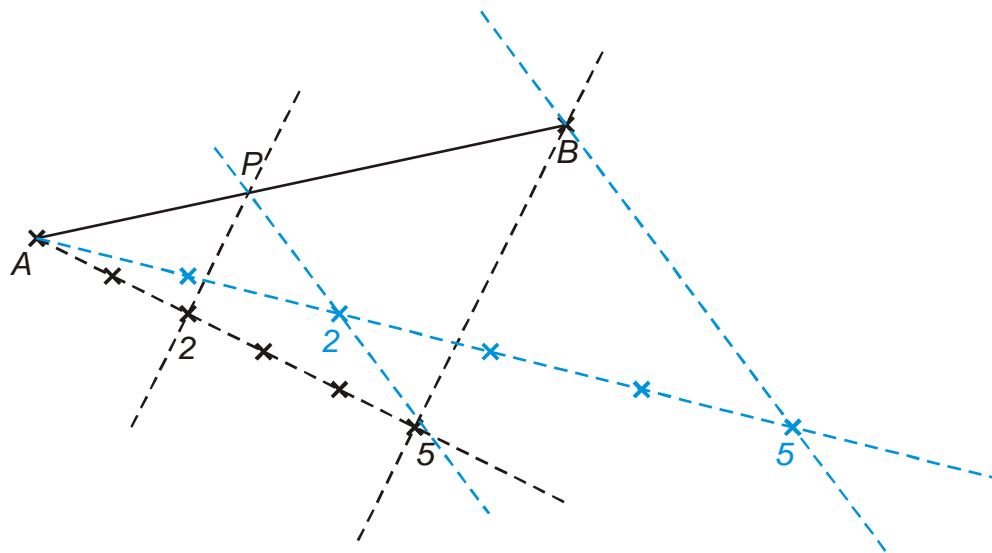


Pro rozdělení úsečky využijeme podobnost trojúhelníků:

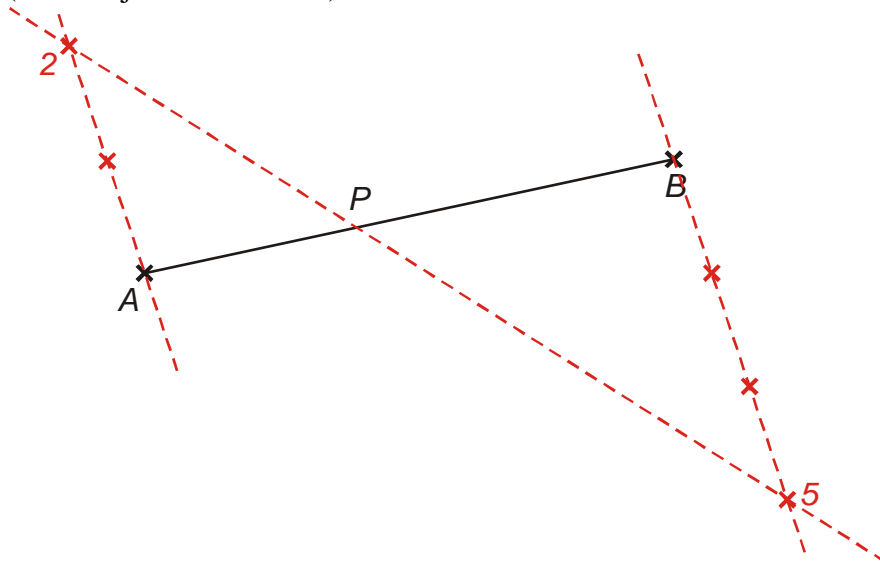
$$\triangle A_2P \sim \triangle A_5B \text{ (podle věty } uu) \text{ v poměru } 2:5 \text{ (podle poměru stran } \frac{|A_2P|}{|A_5B|}) \Rightarrow |AP| = \frac{2}{5}|AB|$$

$$\Rightarrow |AP| = \frac{2}{3}|PB|.$$

Že výsledek nezávisí na volbě pomocné přímky ani velikosti dílku na ní je vidět z obrázku:

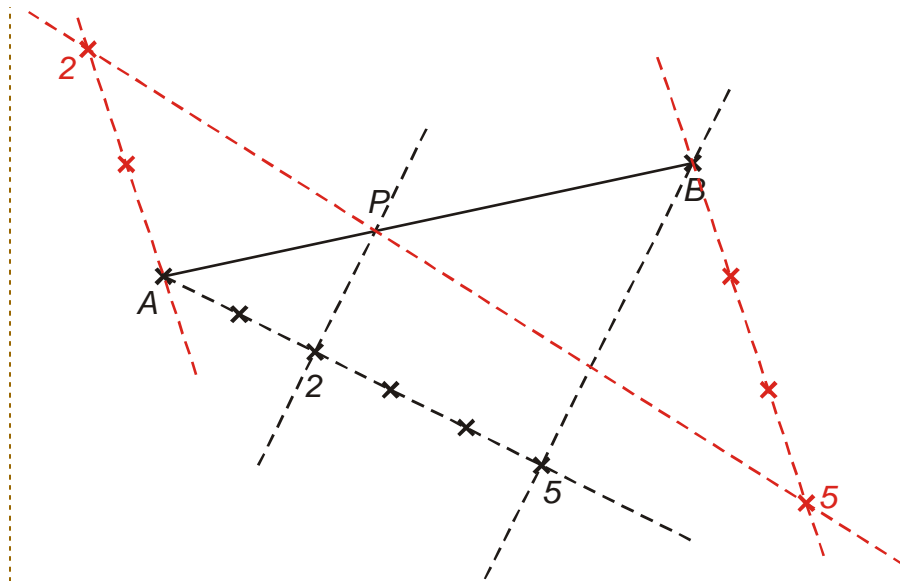


Využití podobnosti můžeme být i ještě přímočařejší, když si pomocné přímky nakreslíme dvě (samozřejmě rovnoběžné):

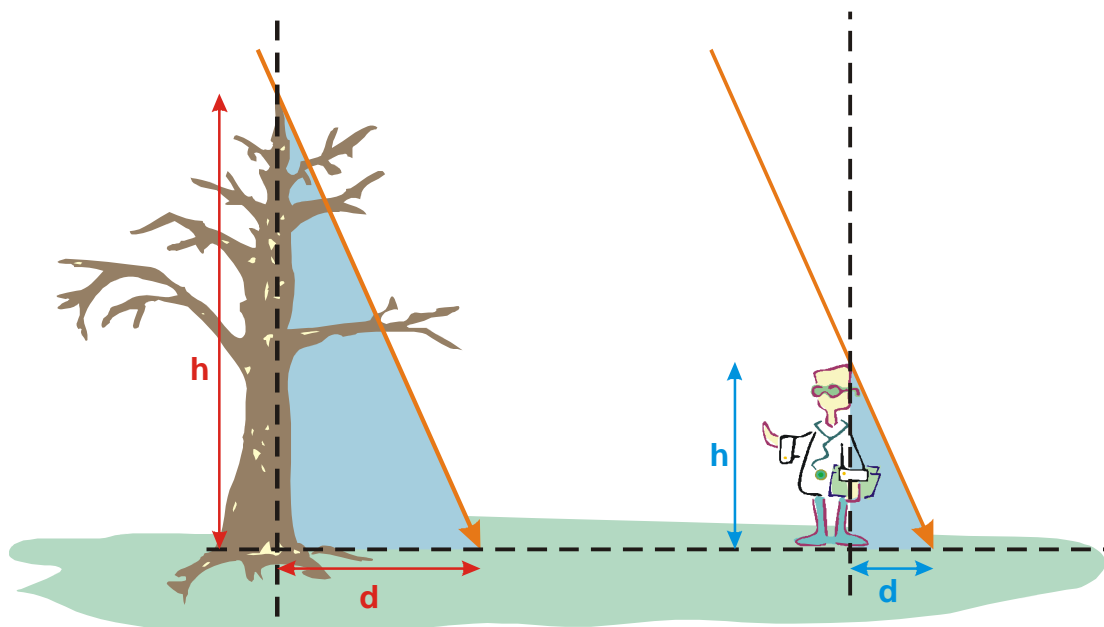


$\triangle A2P \sim \triangle B5B$ (podle věty **uu**) v poměru 2:3 (podle poměru stran $\frac{|A2|}{|B5|}$) $\Rightarrow |AP| = \frac{2}{3}|PB|$.

Z následujícího obrázku je zřejmé, že získáme stejné řešení jako při použití první metody:

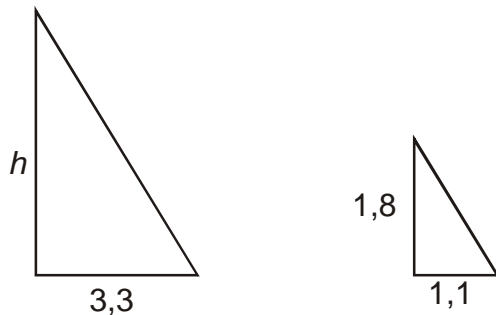


Př. 6: Vymysli způsob, jak pomocí stínu měřit výšku předmětů.



Metoda je zřejmá z obrázku: v jednom okamžiku mají sluneční paprsky na jenom místě Země stejný směr. sluneční paprsek tak spolu se svislicí a délkou stínu vytvoří podobné trojúhelníky \Rightarrow pokud známe u jednoho předmětu jeho výšku a délku stínu, můžeme pomocí podobnosti spočítat výšku libovolného předmětu, u kterého změříme délku stínu ve stejném okamžiku.

- Př. 7:** Člověk vysoký 1,8 m vrhá stín o délce 1,1 m. Jaká je výška stromu, jehož stín měl ve stejném okamžiku délku 3,3 m. Rovnici pro výpočet výšky stromu sestav:
 a) na základě poměrů mezi odpovídajícími si stranami obou trojúhelníků
 b) na základě poměrů mezi stranami jednoho trojúhelníka



- a) na základě poměrů mezi odpovídajícími si stranami obou trojúhelníků

$$\frac{h}{1,8} = \frac{3,3}{1,1} \Rightarrow h = \frac{3,3}{1,1} \cdot 1,8 \text{ m} = 5,4 \text{ m}$$

- b) na základě poměrů mezi stranami jednoho trojúhelníka

$$\frac{h}{3,3} = \frac{1,8}{1,1} \Rightarrow h = \frac{1,8}{1,1} \cdot 3,3 \text{ m} = 5,4 \text{ m}$$

Strom je vysoký 5,4 m.

- Př. 8:** Trojúhelníky ABC a KLM jsou si podobné s koeficientem podobnosti $k = 2$. Urči poměr jejich obsahů.

Trojúhelníky ABC a KLM jsou si podobné s koeficientem podobnosti $k = 2 \Rightarrow$ všechny vzdálenosti naměřené v trojúhelníku KLM jsou dvakrát větší než odpovídající vzdálenosti v trojúhelníku ABC .

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$S_{KLM} = \frac{k \cdot v_k}{2} = \frac{2a \cdot 2v_a}{2} = 4 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = 4S_{ABC}$$

Obsah trojúhelníku KLM je čtyřikrát větší než obsah trojúhelníku ABC .

Stejný efekt známe z převodů jednotek. Platí například $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$, ale $10 \text{ m} = 100 \text{ dm}$.

Objem roste s třetí mocninou a proto pokud se hrana krychle zvětší dvakrát její objem se zvětší osmkrát.

Rychlý růst objemu s velikostí má mnoho důsledků. Například je důvodem, proč se mravenec při pádu z výšky na rozdíl od člověka nezabije, nebo proč vítr zdvihá písek, ale ne dlažební kostky (i když jde o stejný materiál).

- Př. 9:** Petáková:
 strana 86/cvičení 23
 strana 86/cvičení 25

Shrnutí: