3.2.2 Shodnost trojúhelníků II

Předpoklady: 3201

Pokud mají trojúhelníky speciální vlastnosti, mohou se věty o shodnosti zjednodušit

Př. 1: Zformuluj věty o shodnosti:
a) rovnoramenných trojúhelníků
b) rovnostranných trojúhelníků
c) pravoúhlých trojúhelníků

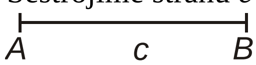
a) věty o shodnosti rovnoramenných trojúhelníků
sss: rovnoramenný trojúhelník má dvě strany (ramena) shodné $\Rightarrow$ dva rovnoramenné trojúhelníky jsou shodné pokud se shodují ve dvou různých stranách
sus: stačí, když se trojúhelníky shodují v úhlu a straně
usu: stačí, když se trojúhelníky shodují v úhlu a straně (druhý úhel je buď stejný nebo zbytek do $180°$)
b) věty o shodnosti rovnostranných trojúhelníků
sss: rovnostranný trojúhelník má všechny tři strany shodné $\Rightarrow$ dva rovnostranné trojúhelníky jsou shodné pokud se shodují v jedné straně
sus: shoda v jedné straně (vnitřní úhly všech rovnostranných trojúhelníku jsou vždy $60°$ a tak je shoda úhlů samozřejmá)
usu: shoda v jedné straně (vnitřní úhly všech rovnostranných trojúhelníku jsou vždy $60°$ a tak je shoda úhlů samozřejmá)
c) věty o shodnosti pravoúhlých trojúhelníků
sss: pro strany pravoúhlého trojúhelníka platí Pythagorova věta $\Rightarrow$ dva pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné pokud se shodují ve dvou stranách (třetí je určena Pythagorovou větou)
sus: stačí, když se trojúhelníky shodují v nepravém úhlu a straně
usu: stačí, když se trojúhelníky shodují v nepravém úhlu a straně (druhý úhel je buď stejný nebo zbytek do $180°$)

Je nutné, aby ve větě ***sus*** u obecného trojúhelníku byl úhel sevřený stranami?
Věty o shodnosti odpovídají jednoznačným postupům při konstrukci trojúhelníka $\Rightarrow$ zkusíme sestrojit trojúhelník podle věty ***ssu*** (strana, strana, úhel – tedy úhel proti jedné ze stran ne mezi nimi).

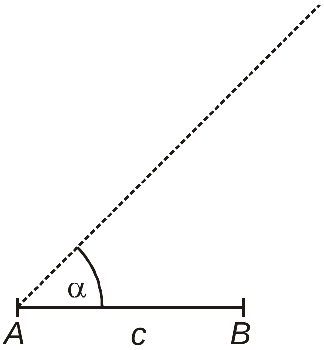
Př. 2: V trojúhelníku *ABC* jsou dány strany *a*, *c* a úhel α. Rozhodni zda, je tento trojúhelník zadán jednoznačně.

Budeme trojúhelník sestrojovat a sledovat, zda není někde více možností.

Sestrojíme stranu *c*

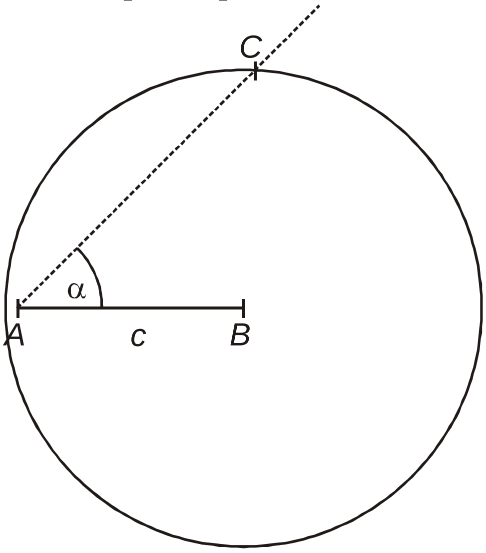


Sestrojíme úhel α



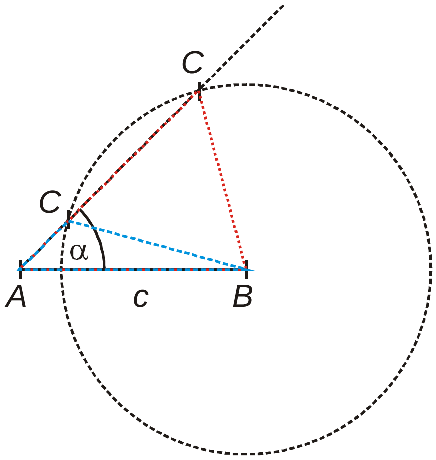
Hledáme vrchol C jako průsečík kružnice $k(B;a)$ se šikmým ramenem úhlu α.

pokud platí $a > c$



Kružnice má s polopřímkou jediný průsečík $\Rightarrow$ jednoznačná konstrukce $\Rightarrow$ věta o shodnosti **Ssu** (S – strana proti úhlu je větší).

pokud platí $a < c$



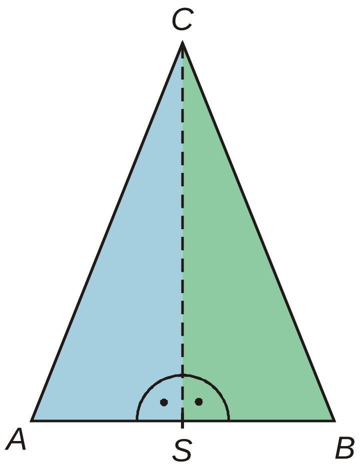
Kružnice může mít s polopřímkou dva průsečíky $\Rightarrow$ dva různé trojúhelníky $\Rightarrow$ není obecná věta o shodnosti ssu

Pedagogická poznámka: Většina studentů kreslí pouze situaci pro $a < c$ (je zajímavé, že si mnohdy nevšimnou, že má dvě řešení, protože místo celé kružnice nakreslí jenom bližší průsečík s polopřímkou *AC*). Když jim připomenete, že poloměr kružnice není znám a může se měnit alespoň část z nich jednoznačné řešení objeví.

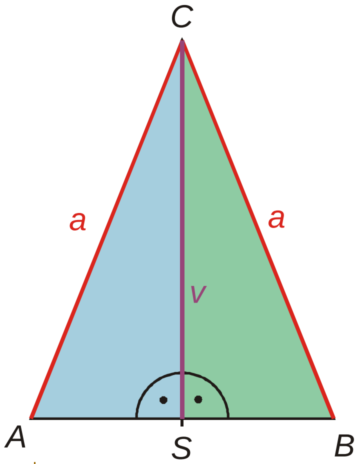
Věta Ssu:
Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich, jsou shodné.

Př. 3: Dokaž, že výška na základnu dělí rovnoramenný trojúhelník na dvě shodné poloviny.

Patu výšky označíme *S*, vzniknou dva trojúhelníky:



Hledáme shodné strany a úhly trojúhelníků ASC a BSC:



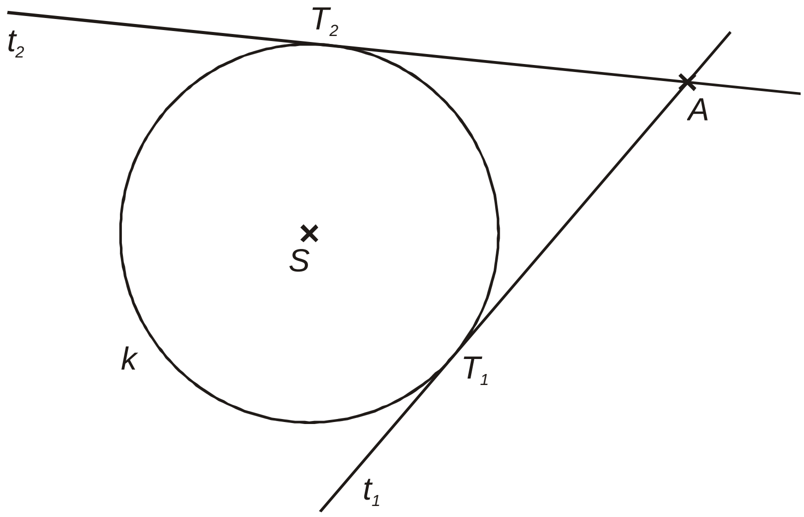
- shodné jsou strany AC a BC (ramena rovnoramenného s trojúhelníku).
- shodné jsou strany SC, protože jde o jednu a tu samou stranu
- shodné jsou úhly při vrcholu S (jsou pravé)

$\Rightarrow$ trojúhelníky ASC a BSC jsou shodné podle věty ***Ssu.***

Pedagogická poznámka: Stejně jako u příkladů v minulé hodině mají studenti tendenci vycházet z neověřených údajů. Konkrétně z rovnosti $|AS| = |BS|$, která z toho, že úsečka SC je výškou v trojúhelníku nijak nevyplývá (a vyplývá až z dokázané shodnosti trojúhelníků ASC a BSC).

Př. 4: Je dána kružnice $k(S;r)$ a bod B, který leží vně kružnice k. Sestroj tečny kružnice k jdoucí z bodu B, tečné body označ T_1 a T_2. Dokaž, že platí $|AT_1| = |AT_2|$.

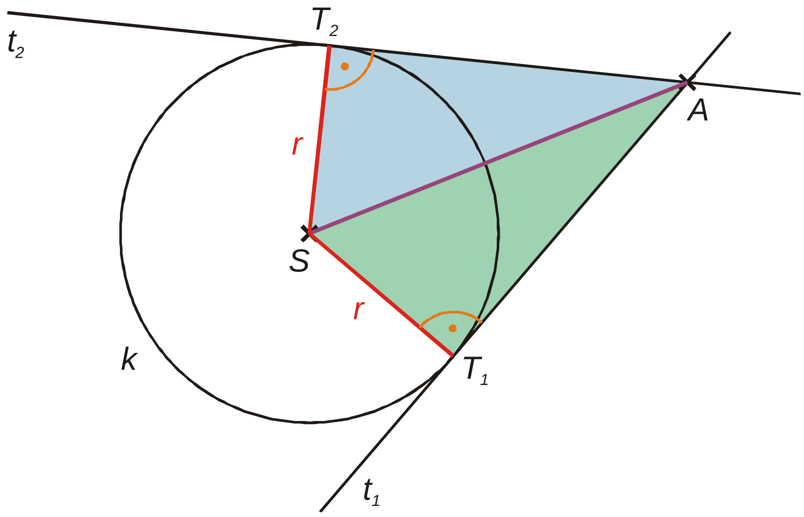
Nakreslíme obrázek:



Shodnost dvou úseček dokážeme pomocí shodnosti dvou trojúhelníků $\Rightarrow$ hledáme dva trojúhelníky, které:

- obsahují úsečky AT_1, AT_2
- mají hodně společného
- využívají speciální rys zadání, tedy kružnici k

$\Rightarrow$ zkusíme využít trojúhelníky AST_1 a AST_2 $\Rightarrow$ hledáme v čem se shodují.



Trojúhelníky AST_1 a AST_2 se shodují:

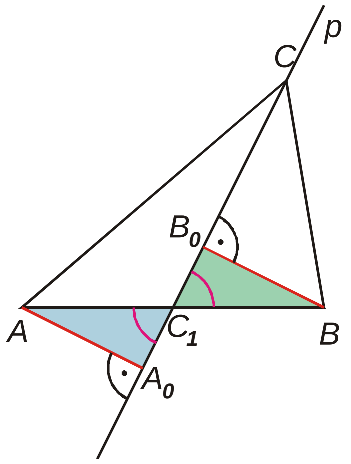
- ve straně AS (je společná obě trojúhelníkům)
- $ST_1 \cong ST_2$ (poloměry kružnice k)
- $\sphericalangle ST_1A \cong \sphericalangle ST_2A$ (pravé úhly, které svírá tečna kružnice s poloměrem)

$\Rightarrow$ $AST_1 \cong AST_2$ (podle věty ***Ssu*** – úhly $\sphericalangle ST_1A; \sphericalangle ST_2A$ jsou pravé a tedy největší v trojúhelnících $\Rightarrow$ strana SA ležící proti nim musí být největší)

$\Rightarrow$ $|AT_1| = |AT_2|$

Pedagogická poznámka: Největší problém předchozího příkladu je ve volbě trojúhelníků. Studenti nejčastěji volí trojúhelník AT_1T_2, který rozdělí výškou na dva. Slabina této volby spočívá právě v tom, že nijak nevyužívá fakt, že body T_1 a T_2 leží na kružnici.

Př. 5: Je dán trojúhelník *ABC*, *p* je přímka, na níž leží těžnice t_C tohoto trojúhelníku. Dokaž, že body *A*, *B* mají od přímky *p* stejnou vzdálenost.



Vzdálenosti bodů *A*, *B* od přímky *p* jsou určeny pomocí kolmic k této přímce jako délky úseček $|AA_0|$ a $|BB_0|$.

Hledáme shodné trojúhelníky, které obsahují tyto úsečky.

$\Rightarrow$ Možnost trojúhelníky AA_0C_1 a BB_0C_1 $\Rightarrow$ Snaha najít shodné velikosti nebo úhly:

- $AC_1 \cong BC_1$ (bod C_1 je patou těžnice a tedy středem úsečky *AB*)
- $\sphericalangle AC_1A_0 \cong \sphericalangle BC_1B_0$ (úhly vrcholové)
- $\sphericalangle AA_0C_1 \cong \sphericalangle BB_0C_1$ (pravé úhly u pat kolmic)

$\Rightarrow$ shodná je i dvojice třetích úhlů (zbytek do $180°$) $\sphericalangle C_1AA_0 \cong C_1BB_0$

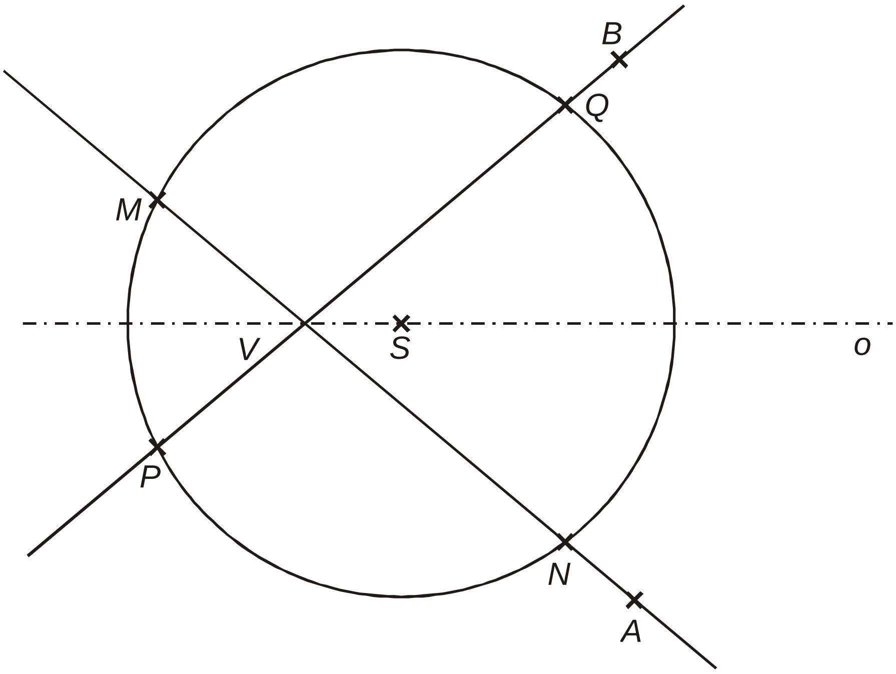
$\Rightarrow$ trojúhelníky jsou shodné podle věty ***usu***

$\Rightarrow$ $|AA_0| \cong |BB_0|$ $\Rightarrow$ body *A*, *B* mají stejnou vzdálenost od přímky *p*.

Pedagogická poznámka: Hodně se vyřeší pokud studentům v pravý čas připomenete, že vzdálenost bodu od přímky se určuje pomocí kolmice. Mnozí mají pocit, že není co dokazovat, když bod C_1 je středem úsečky *AB*.

Př. 6: Na ose *o* ostrého úhlu *AVB* sestroj uvnitř úhlu *AVB* bod *S*. Sestroj kružnici $k(S;r)$ tak,a by platilo $r > |VS|$. Označ průsečíky přímky *AV* s kružnicí *k* jako *M*, *N* a průsečíky přímky *BV* s kružnicí *k* jako *PQ*. Dokaž, že platí $|MN| = |PQ|$.

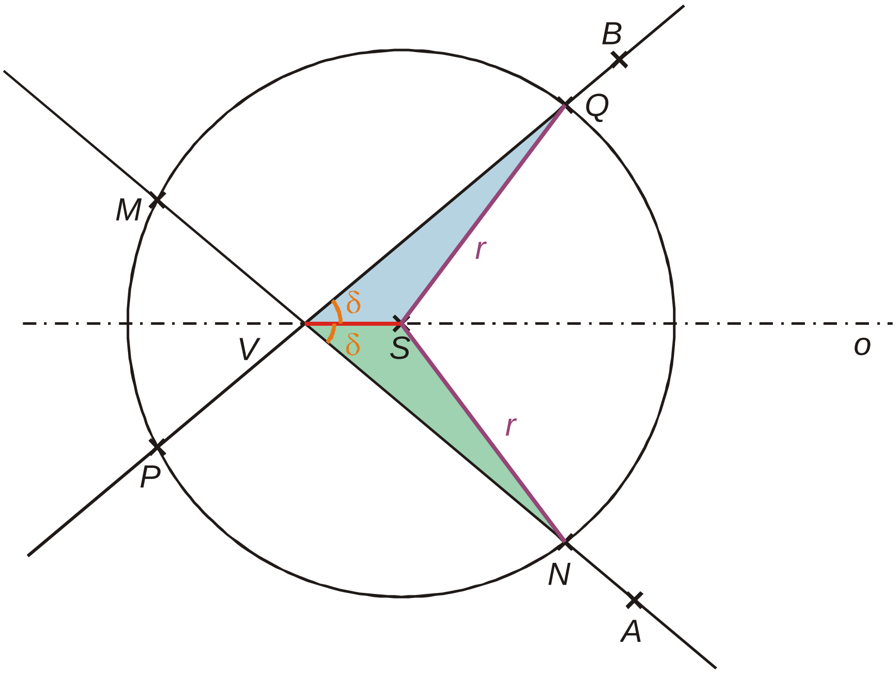
Nakreslíme obrázek:



Rychle řešení není vidět, zkusíme příklad rozdělit na dva.
Nejdříve se pokusíme dokázat rovnost: $|VQ| = |VN|$.
Hledáme trojúhelníky s vlastnostmi, které jsme použili již v příkladu 4:

- obsahují úsečky VQ a VN
- mají hodně společného
- využívají speciální rys zadání, tedy kružnici k a osu o

$\Rightarrow$ zkusíme trojúhelníky VSN a VSQ:



trojúhelníky se shodují:

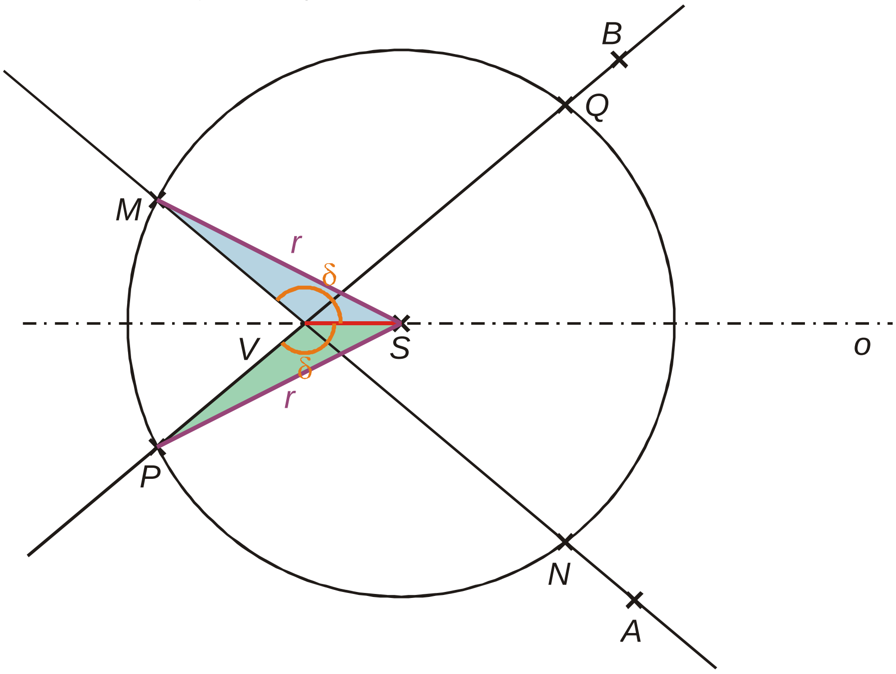
- ve straně VS (je společná obě trojúhelníkům)
- $SN \cong SQ$ (poloměry kružnice k)
- $\sphericalangle SVN \cong \sphericalangle SVQ$ (shodných poloviny úhlu BVA)

$\Rightarrow$ trojúhelníky jsou shodné podle věty ***Ssu*** $\Rightarrow$ platí $|VN| = |VQ|$

Nyní se pokusíme dokázat rovnost: $|MV| = |PV|$.
Hledáme trojúhelníky s vlastnostmi, které jsme použili již v příkladu 4:

- obsahují úsečky *MV* a *PV*
- mají hodně společného
- využívají speciální rys zadání, tedy kružnici *k* a osu *o*

$\Rightarrow$ zkusíme trojúhelníky *MVS* a *PVS*:



trojúhelníky se shodují:

- ve straně *VS* (je společná obě trojúhelníkům)
- $SM \cong SP$ (poloměry kružnice *k*)
- $\sphericalangle SVM \cong \sphericalangle SVP$ (součet shodných vrcholových úhlů a shodných polovin úhlu *BVA*)

$\Rightarrow$ trojúhelníky jsou shodné podle věty ***Ssu*** $\Rightarrow$ platí $|MV| = |PV|$

úsečky *MN* a *PQ* získáme sečtením dvou dvojic shodných úseček $\Rightarrow$ platí $|MN| = |PQ|$.

Př. 7: Petáková:
strana 86/cvičení 20

Shrnutí: Velké *S* ve jménu věty *Ssu* znamená, že strana proti úhlu musí být větší.