2.9.26 Logaritmické rovnice (shrnuti)

Předpoklady: 2922

Pedagogická poznámka: Smyslem hodiny je stejně jako u jiných shrnutí nácvik „výběru metody“. S jedinou výjimkou jsou všechny příklady typickou obdobou příkladů, které jsme již řešili, a jde pouze o to, aby studenti dokázali vybrat, která z metod se k danému příkladu hodí. Pokud studenti neví, vždy se bavíme o tom, jaké rysy příklad má, co to znamená pro jejich řešení atd..

Př. 1: Vyřeš rovnici $\log x^2 + \log x^4 = 3$.

Podmínky: $x \neq 0$.
Upravíme rovnici: $\log x^2 + 2\log x^2 = 3$

$3\log x^2 = 3$

$\log x^2 = 1$

$\log x^2 = \log 10$

$x^2 = 10$

$x_1 = \sqrt{10}$ $\quad x_2 = -\sqrt{10}$ $\quad K = \left\{\pm\sqrt{10}\right\}$

Pedagogická poznámka: Studenti většinou odstraní mocniny z argumentů logaritmů a tím přijdou o záporný kořen. Opět jde o to, že jsme takový příklad už řešili, studenty překvapil a měli by si tento problém pamatovat (nebo ho mít zachycený v arzenálu).

Př. 2: Vyřeš rovnici $\frac{\log x - 2}{\log x + 1} = \frac{\log x + 3}{\log x - 1}$.

Podmínky: $x > 0$.
Neznámá se vyskytuje pouze ve výrazu $\log x$ $\Rightarrow$ provedeme substituci a tím se příklad zjednoduší.

Substituce: $y = \log x$

$\frac{y-2}{y+1} = \frac{y+3}{y-1} \quad / (y+1)(y-1)$

$(y-2)(y-1) = (y+3)(y+1)$

$y^2 - 2y - y + 2 = y^2 + 3y + y + 3$

$-3y = 4y + 1$

$-1 = 7y$

$y = -\frac{1}{7}$

Návrat k původní proměnné:

$y = \log x = -\frac{1}{7}$

$\log x = \log 10^{-\frac{1}{7}}$

$x = 10^{-\frac{1}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{10}}$ $\qquad K = \left\{ \frac{1}{\sqrt[7]{10}} \right\}$

Př. 3: Vyřeš rovnici $x^{\log x - 3} = \frac{x}{1000}$.

Podmínky: $x > 0$.
Neznámá je exponentu $\Rightarrow$ rovnici zlogaritmujeme, abychom neznámou dostali z exponentu dolů.

$\log x^{\log x - 3} = \log \frac{x}{1000}$

$(\log x - 3)\log x = \log x - \log 1000$

$(\log x - 3)\log x = \log x - 3$

V rovnici se vyskytuje druhá mocnina logaritmu $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $y = \log x$

$(y-3)y = y - 3$

$y^2 - 3y = y - 3$

$y^2 - 4y + 3 = 0$

$(y-3)(y-1) = 0$

$y_1 = 3 \qquad y_2 = 1$

Návrat k původní proměnné:

$y = \log x = 3$ $\qquad$ $y = \log x = 1$

$\log x = \log 10^3$ $\qquad$ $\log x = \log 10^1$

$x = 1000$ $\qquad$ $x = 10$

$K = \{10; 1000\}$

Pedagogická poznámka: Nejčastějším problémem je opět vynechání závorky při úpravě

$$\log x^{\log x - 3} = \log \frac{x}{1000} \Rightarrow (\log x - 3)\log x = \log x - \log 1000.$$

Př. 4: Vyřeš rovnici $2\log x^3 - 3\log\sqrt{x} + \log 2 = 2\log x + \log 4 - \frac{1}{2}\log x$.

Podmínky: $x > 0$.
Mezi logaritmy se vykytuje pouze sčítání a odčítání $\Rightarrow$ můžeme převést na tvar $\log výraz1 = \log výraz2$.

$2\log x^3 - 3\log\sqrt{x} + \log 2 = 2\log x + \log 4 - \frac{1}{2}\log x$

$\log\left(x^3\right)^2 - \log\left(\sqrt{x}\right)^3 + \log 2 = \log x^2 + \log 4 - \log\sqrt{x}$

$\log x^6 - \log x^{\frac{3}{2}} + \log 2 = \log x^2 + \log 4 - \log x^{\frac{1}{2}}$

$\log \frac{2x^6}{x^{\frac{3}{2}}} = \log \frac{4x^2}{x^{\frac{1}{2}}}$ odlogaritmujeme

$\frac{2x^6}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{4x^2}{x^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{x^4}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

$x^3 = 2$

$x = \sqrt[3]{2}$ $\qquad K = \left\{\sqrt[3]{2}\right\}$

Pedagogická poznámka: Častější než řešení uvedené výše je postup, při kterém studenti všechny členy upraví na substituci $a = \log x$. Získají tak rovnici $3a = \log 4 - \log 2$.

Následující úpravy už je většinou nenapadnou: $3\log x = \log \frac{4}{2}$

$\log x^3 = \log 2$

$x^3 = 2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{2}$.

Př. 5: Vyřeš rovnici: $\log_9^2 9x^2 + \log_9 81x^3 = 5$.

Podmínky: $x > 0$.
Rovnice obsahuje druhou mocninu logaritmu $\Rightarrow$ musíme použít substituci. Uvnitř logaritmů jsou různé výrazy $\Rightarrow$ musíme je upravit na stejný tvar (zřejmě $\log_9 x$).

$\left(\log_9 9x^2\right)^2 + \log_9 81x^3 = 5$

$\left(\log_9 9 + \log_9 x^2\right)^2 + \log_9 81 + \log_9 x^3 = 5$

$\left(1 + 2\log_9 x\right)^2 + 2 + 3\log_9 x = 5$

Substituce: $y = \log_9 x$

$\left(1 + 2y\right)^2 + 2 + 3y = 5$

$1 + 4y + 4y^2 + 2 + 3y = 5$

$4y^2 + 7y - 2 = 0$

$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 4\cdot(-2)}}{2\cdot 4} = \frac{-7 \pm 9}{8}$

$y_1 = \frac{-7-9}{8} = -2$ $\qquad y_2 = \frac{-7+9}{8} = \frac{1}{4}$

Návrat k původní proměnné:

$y_1 = \log_9 x_1 = -2$

$\log_9 x_1 = \log_9 9^{-2}$

$x_1 = \frac{1}{81}$

$y = \log_9 x_2 = \frac{1}{4}$

$\log_9 x_2 = \log_9 9^{\frac{1}{4}}$

$x_2 = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$K=\left\{\frac{1}{81};\sqrt{3}\right\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici: $\ln(3x-1)\cdot\log_2(x^2)\cdot\log_{0,5}(3-x)=0$.

Podmínky: $3x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{3}$, $x^2>0 \Rightarrow x\neq 0$, $3-x>0 \Rightarrow x<3$.

Levá strana rovnice obsahuje součin čísel, který se má rovnat nule $\Rightarrow$ rovnice vyjde, pokud se libovolný člen v součinu bude rovnat nule (jde o obdobu součinového tvaru rovnice) $\Rightarrow$ získáme tři jednoduché rovnice.

$\ln(3x-1)=0$	$\log_2(x^2)=0$	$\log_{0,5}(3-x)=0$
$\ln(3x-1)=\ln e^0$	$\log_2(x^2)=\log_2 2^0$	$\log_{0,5}(3-x)=\log_{0,5} 0,5^0$
$3x-1=1$	$x^2=1$	$3-x=1$
$3x=2$	$x_2=1 \qquad x_3=-1$	$x_4=2$
$x_1=\frac{2}{3}$		

Při kontrole podmínek jeden z kořenů $x_3=-1$ vypadne: $K=\left\{\frac{2}{3};1;2\right\}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je dost odlišný od všeho, co studenti u logaritmů znají, proto se jim většinou snažím poradit. Nejdříve se však snažím, aby si uvědomili, jak rovnice vypadá, že logaritmy jsou jenom „čísla“ (mezi kterými je součin) a na pravé straně je nula.

Př. 7: Vyřeš rovnici: $\ln\left\{\log_{0,5}\left[\log_\pi(\log_3 x-1)+2\right]+2\right\}=0$.

Rovnici budeme zvenku postupně odlogaritmovávat:

$\ln\left\{\log_{0,5}\left[\log_\pi(\log_3 x-1)+2\right]+2\right\}=\ln 1$ - odlogaritmujeme

$\log_{0,5}\left[\log_\pi(\log_3 x-1)+2\right]+2=1$

$\log_{0,5}\left[\log_\pi(\log_3 x-1)+2\right]=-1=\log_{0,5} 0,5^{-1}$

$\log_{0,5}\left[\log_\pi(\log_3 x-1)+2\right]=\log_{0,5} 2$ - odlogaritmujeme

$\log_\pi(\log_3 x-1)+2=2$

$\log_\pi(\log_3 x-1)=0=\log_\pi \pi^0$

$\log_\pi(\log_3 x-1)=\log_\pi 1$ - odlogaritmujeme

$\log_3 x-1=1$

$\log_3 x=2=\log_3 3^2$

$\log_3 x=\log_3 9$ - odlogaritmujeme

$x=9 \qquad K=\{9\}$

Př. 8: Vyřeš rovnici: $\log_x 3 + 3\log_{3x} 9 = 6\log_{x^2} 3$.

Podmínky: $x > 0$, $x \neq 1$.
Rovnice obsahuje neznámou v základech logaritmů, základy jsou různé $\Rightarrow$ použijeme vzorec na změnu základu a převedeme všechny logaritmy na základ 3 (hodně se vyskytují 3 a jejich mocniny).

$$\log_x 3 + 3\log_{3x} 9 = 6\log_{x^2} 3$$

$$\frac{\log_3 3}{\log_3 x} + 3\frac{\log_3 9}{\log_3 3x} = 6\frac{\log_3 3}{\log_3 x^2}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + 3\frac{2}{\log_3 3 + \log_3 x} = 6\frac{1}{2\log_3 x}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{6}{1+\log_3 x} = \frac{3}{\log_3 x}$$

Substituce: $y = \log_3 x$

$$\frac{1}{y} + \frac{6}{1+y} = \frac{3}{y} \quad / \, y(1+y)$$

$$1 + y + 6y = 3(1+y)$$

$$1 + y + 6y = 3 + 3y$$

$$4y = 2$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y = \log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 x = \log_3 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt{3} \qquad K = \left\{\sqrt{3}\right\}$$

Shrnutí: