

2.9.24 Logaritmické nerovnice I

Př. 1: Vyřeš nerovnici $\log_2(x+1) < 2$.

Podmínka: $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$$\log_2(x+1) < 2 \quad \log_2(x+1) < \log_2 2^2 \quad \log_2(x+1) < \log_2 4 \quad (x+1) < 4$$

$$x < 3 \quad K = (-1; 3)$$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < -1$.

Podmínka: $2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < -1 \quad \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < \log_{\frac{1}{2}} 2$$

$$2x-1 > 2 \quad 2x > 3 \quad x > \frac{3}{2} \quad K = \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$$

Při řešení logaritmických nerovnic musíme dávat pozor na:

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\log_3(x+2) < \log_3(3-x)$.

Podmínky: $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$, $3-x > 0 \Rightarrow 3 > x$.

$$\log_3(x+2) < \log_3(3-x) \quad x+2 < 3-x \quad 2x < 1$$

$$x < \frac{1}{2}, \text{ musíme splnit podmínky } x > -2, x < 3 \Rightarrow K = \left(-2; \frac{1}{2}\right).$$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $\log_{0,5} x + \log_{0,5}(x+3) \geq 2 \log_{0,5} 2$.

Podmínky: $x > 0$, $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$.

$$\log_{0,5} x + \log_{0,5}(x+3) \geq 2 \log_{0,5} 2 \quad \log_{0,5} x(x+3) \geq \log_{0,5} 2^2$$

$$\log_{0,5} x^2 + 3x \geq \log_{0,5} 4 \quad x^2 + 3x \leq 4 \quad x^2 + 3x - 4 \leq 0$$

$(x+4)(x-1) \leq 0$ Zdá se, že řešením je interval $\langle -4; 1 \rangle$, musíme splnit podmínky $x > 0$,

$$x > -3 \quad \Rightarrow \quad K = (0; 1)$$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $\log|x-3| < 2$.

Podmínky: $|x-3| > 0 \Rightarrow x \neq 3$.

$$\log|x-3| < 2 \quad \log|x-3| < \log 10^2 \quad |x-3| < 100 \text{ - hledáme čísla, vzdálená od } 3 \text{ o méně než } 100 \Rightarrow \text{interval } (-97; 103) \text{ podmínku } x \neq 3 \Rightarrow K = (-97; 3) \cup (3; 103).$$

Př. 6: Vyřeš nerovnici $\log_x 9 < 4$.

Podmínky: $x > 0$, $x \neq 1$.

a) pomocí definice logaritmu

$$\log_x 9 < \log_x x^4, 0 < x < 1$$

(základ logaritmu je menší než 1 \Rightarrow obracíme znaménko nerovnosti)

$$9 > x^4 \quad / \sqrt[4]{\quad} \quad (x > 0 \text{ kvůli podmínce}$$

$$\text{v logaritmu}) \sqrt[4]{9} > x \quad x < \sqrt{3}$$

$$\log_x 9 < \log_x x^4, x > 1$$

(základ logaritmu je větší než 1 \Rightarrow neobracíme znaménko nerovnosti)

$$9 < x^4 \quad / \sqrt[4]{\quad} \quad (x > 0 \text{ kvůli podmínce}$$

$$\text{v logaritmu}) \sqrt[4]{9} < x \quad x > \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow K_1 = (0; 1).$$

$$\Rightarrow K_2 = (\sqrt{3}; \infty).$$

$$K = K_1 \cup K_2 = (0; 1) \cup (\sqrt{3}; \infty)$$

b) pomocí vzorce na změnu základu

Nahradíme $\log_x 9$ podílem logaritmů: $\log_x 9 = \frac{\log_9 9}{\log_9 x} = \frac{1}{\log_9 x}$.

$$\log_x 9 < 4 \quad \frac{1}{\log_9 x} < 4$$

$$\log_9 x < 0 \Rightarrow x < 1$$

$$\frac{1}{\log_9 x} < 4 \quad / \cdot \log_9 x \quad 1 > 4 \log_9 x$$

$$\frac{1}{4} > \log_9 x \quad \log_9 9^{\frac{1}{4}} > \log_9 x -$$

$$\sqrt[4]{9} > x \quad x < \sqrt{3} \quad \Rightarrow K_1 = (0; 1).$$

$$\log_9 x > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$\frac{1}{\log_9 x} < 4 \quad / \cdot \log_9 x$$

$$1 < 4 \log_9 x \quad \frac{1}{4} < \log_9 x \quad \log_9 9^{\frac{1}{4}} < \log_9 x -$$

$$\sqrt[4]{9} < x \quad x > \sqrt{3} \quad \Rightarrow K_2 = (\sqrt{3}; \infty).$$

$$K = K_1 \cup K_2 = (0; 1) \cup (\sqrt{3}; \infty)$$

Př. 7: Vyřeš nerovnici $\log_{0,5} \frac{x+3}{2x-1} \leq 0$.

Podmínky: $\frac{x+3}{2x-1} > 0 \Rightarrow$ Nulové body: $x+3=0 \Rightarrow x=-3$, $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$.



$$x \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$$

$$\log_{0,5} \frac{x+3}{2x-1} \leq 0$$

$$\log_{0,5} \frac{x+3}{2x-1} \leq \log_{0,5} 1$$

$$\frac{x+3}{2x-1} \geq 1$$

$$x < \frac{1}{2} \Rightarrow \text{násobíme záporným číslem} \Rightarrow$$

obracíme nerovnost.

$$x+3 \leq 2x-1$$

$$4 \leq x$$

Zdá se, že řešením je interval $\langle 4; \infty \rangle$, počítáme

s čísly $x < \frac{1}{2} \Rightarrow K_1 = \emptyset$.

$$x > \frac{1}{2} \Rightarrow \text{násobíme kladným číslem} \Rightarrow$$

nerovnost zachováváme.

$$x+3 \geq 2x-1$$

$$4 \geq x$$

Zdá se, že řešením je interval $(-\infty; 4]$, počítáme

s čísly $x > \frac{1}{2} \Rightarrow K_2 = \left(\frac{1}{2}; 4\right]$.

$$K = K_1 \cup K_2 = \left(\frac{1}{2}; 4\right]$$

Př. 8: Petáková:

strana 38/cvičení 29 b) d) f)

strana 38/cvičení 30 c) e)

strana 38/cvičení 31 c)

strana 38/cvičení 34 a)

strana 38/cvičení 37 d) g)