2.9.23 Logaritmické rovnice V

Předpoklady: 2922

Př. 1: Vyřeš rovnici $0,5^{\log_3 x}+4=4\cdot 0,5^{\log_3 x+1}$.

Problém: Neznámá je uzavřena nejen v logaritmu, ale i v mocnině $\Rightarrow$ zkusíme substituci, abychom získali co nejjednodušší rovnost s neznámou.
Možná substituce: $a=0,5^{\log_3 x}$ $\Rightarrow$ musíme rovnici upravit.

$0,5^{\log_3 x}+4=4\cdot 0,5^{\log_3 x}\cdot 0,5^1$

$0,5^{\log_3 x}+4=2\cdot 0,5^{\log_3 x}$

Substituce: $a=0,5^{\log_3 x}$

$a+4=2a$

$a=4$

Návrat k původní proměnné:

$a=0,5^{\log_3 x}=4$

$0,5^{\log_3 x}=0,5^{-2}$

$\log_3 x=-2$

$\log_3 x=\log_3 3^{-2}$

$x=\frac{1}{9}$ $\qquad K=\left\{\frac{1}{9}\right\}$

Př. 2: Vyřeš rovnici $3\cdot 4^{\log x}-25\cdot 2^{\log x}+8=0$.

Problém: Substituce není zcela jasná, zadání připomíná kvadratickou rovnici.

$4^{\log x}=\left(2^2\right)^{\log x}=\left(2^{\log x}\right)^2$

$3\cdot 4^{\log x}-25\cdot 2^{\log x}+8=0$

$3\cdot\left(2^{\log x}\right)^2-25\cdot 2^{\log x}+8=0$

Substituce: $y=2^{\log x}$

$3y^2-25y+8=0$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-25)\pm\sqrt{(-25)^2-4\cdot 3\cdot 8}}{2\cdot 3}=\frac{25\pm 23}{6}$$

$y_1=\frac{25+23}{6}=8$ $\qquad y_2=\frac{25-23}{6}=\frac{1}{3}$

Návrat k původní proměnné:

$y_1=2^{\log x_1}=8$

$2^{\log x_1}=2^3$

$\log x_1=3$

$\log x_1=\log 10^3$

$x_1=1000$

$y_2=2^{\log x_2}=\frac{1}{3}$

$2^{\log x_2}=\frac{1}{3}$

$\log_2 2^{\log x_2}=\log_2\frac{1}{3}$

$\log x_2 \cdot \log_2 2 = \log_2 \frac{1}{3}$

$\log x_2 \cdot 1 = -\log_2 3$

$\log x_2 = \log 10^{-\log_2 3}$

$x_2 = 10^{-\log_2 3}$

$K = \left\{1000; 10^{-\log_2 3}\right\}$

Pedagogická poznámka: Obě předchozí rovnice jsou exponenciální, takže se opět projeví Ti, kteří mají problémy s pamětí.

Př. 3: Vyřeš rovnici $x + \log_3\left(3^x + 6\right) = 3$.

Problém: Zdánlivě neřešitelné, logaritmus nejde rozdělit (obsahuje součet), *x* se vyskytuje ve zcela odlišných situacích $\Rightarrow$ přepíšeme si $x = \log_3 3^x$, abychom zapsali obě *x* podobně (jako exponent mocniny 3).

$\log_3 3^x + \log_3\left(3^x + 6\right) = 3$

$\log_3\left[3^x\left(3^x + 6\right)\right] = \log_3 3^3$

$3^x\left(3^x + 6\right) = 27$

Substituce: $y = 3^x$

$y(y+6) = 27$

$y^2 + 6y - 27 = 0$

$(y+9)(y-3) = 0$

$y_1 = -9$ $\qquad$ $y_2 = 3$

Návrat k původní proměnné:

$y_1 = 3^{x_1} = -9$ nejde

$y_2 = 3^{x_2} = 3$

$3^{x_2} = 3^1$

$x_2 = 1$

$K = \{1\}$

Pedagogická poznámka: Trik na vyřešení předchozího příkladu těžko někdo ze studentů objeví, nemá tedy cenu nechat je dlouho přemýšlet.

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic: $\begin{array}{c} 2x + y = 12 \\ \log_4 x + \log_4 y = 2 \end{array}$.

Situace: Jedna rovnice je s logaritmy, druhá bez nich $\Rightarrow$ nepůjde použít substituci ani přímé řešení $\Rightarrow$ zkusíme upravit druhou rovnici tak, aby z ní zmizely logaritmy:

$\log_4 x + \log_4 y = 2$

$\log_4 xy = \log_4 4^2$ odlogaritmujeme

$xy = 16$

Z první rovnice vyjádříme *y*: $2x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 2x$.

Dosadíme do druhé rovnice: $xy = x(12-2x) = 16$.

$12x - 2x^2 = 16 \quad /:2$

$6x - x^2 - 8 = 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x-4)(x-2) = 0$

- $x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 12 - 2x_1 = 12 - 2\cdot 4 = 4$
- $x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 12 - 2x_2 = 12 - 2\cdot 2 = 8$

$K = \{[4;4];[2;8]\}$

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic: $\begin{aligned} \log x^2 + \log y^3 &= 5 \\ \log xy &= 3 \end{aligned}$.

Situace: Máme dvě možnosti:

- převést rovnice na tvar: $\log vyraz1 = \log vyraz2$ a odlogaritmovat (získáme součiny mocnin *x* a *y*),
- upravit rovnice tak, aby se v nich vyskytoval pouze $\log x$ a $\log y$ a použít substituci

$\Rightarrow$ vyhneme se mocninám $\Rightarrow$ použijeme druhou možnost.

$2\log x + 3\log y = 5$

$\log x + \log y = 3$

Substituce: $a = \log x$, $b = \log y$

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 5 \\ a + b &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} & 2a + 3b = 5 \\ [\![1]\!] - 2[\![2]\!] & \quad b = -1 \end{array}$$

dopočteme *a*: $2a + 3b = 2a + 3(-1) = 5 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Návrat k původní proměnné:

$a = 4 = \log x \Rightarrow \log 10^4 = \log x \Rightarrow x = 10000$

$b = -1 = \log y \Rightarrow \log 10^{-1} = \log y \Rightarrow y = 0{,}1$

$K = \{[10000;0{,}1]\}$

Př. 6: Vyřeš soustavu rovnic: $\begin{aligned} \log_2^2 2x - \log_2 x^2 + \log_2 y &= 9 \\ 3\log x^2 + \log y^2 &= \log y + \log x^4 \end{aligned}$.

Situace: První rovnice vede jednoznačně na substituci (obsahuje druhou mocninu logaritmu).
Problém: Druhá rovnice obsahuje logaritmy při jiném základu.
Řešení: Z druhé rovnice získáme vztah mezi *x* a *y*, který použijeme v první rovnici na dosazení.

$3\log x^2 + \log y^2 = \log y + \log x^4$

$\log (x^2)^3 + \log y^2 = \log x^4 y$

$\log x^6 y^2 = \log y\, x^4$ - odlogaritmujeme

$x^6 y^2 = y x^4$

$y = x^{-2}$

Dosadíme do první rovnice:

$\log_2^2 2x - \log_2 x^2 + \log_2 x^{-2} = 9$

$(\log_2 2x)^2 - \log_2 x^2 + \log_2 x^{-2} = 9$

$(\log_2 2 + \log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 2\log_2 x = 9$

$(1 + \log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 2\log_2 x = 9$

Substituce: $a = \log_2 x$

$(1+a)^2 - 2a - 2a = 9$

$1 + 2a + a^2 - 2a - 2a = 9$

$a^2 - 2a - 8 = 0$

$(a-4)(a+2) = 0$

$a_1 = 4$ $\qquad$ $a_2 = -2$

Návrat k původní proměnné:

$a_1 = \log_2 x_1 = 4$

$\log_2 x_1 = \log_2 2^4$

$x_1 = 16$

$y_1 = x_1^{-2} = 16^{-2} = \dfrac{1}{256}$

$a_2 = \log_2 x_2 = -2$

$\log_2 x_2 = \log_2 2^{-2}$

$x_2 = \dfrac{1}{4}$

$y_2 = x_2^{-2} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} = 16$

$K = \left\{\left[16; \dfrac{1}{256}\right]; \left[\dfrac{1}{4}; 16\right]\right\}$

Př. 7: Petáková:
strana 37, cvičení 24 d)
strana 37, cvičení 23 a), e)
strana 36, cvičení 21 b), c), d)
strana 37, cvičení 22 c), d), e)

Shrnutí: Řešení některých rovnic můžeme najít tím, že se pokusíme napsat neznámou podobným způsobem.