

2.9.23 Logaritmické rovnice V

Předpoklady: 2922

Př. 1: Vyřeš rovnici $0,5^{\log_3 x} + 4 = 4 \cdot 0,5^{\log_3 x+1}$.

Problém: Neznámá je uzavřena nejen v logaritmu, ale i v mocnině \Rightarrow zkusíme substituci, abychom získali co nejjednodušší rovnost s neznámou.

Možná substituce: $a = 0,5^{\log_3 x} \Rightarrow$ musíme rovnici upravit.

$$0,5^{\log_3 x} + 4 = 4 \cdot 0,5^{\log_3 x} \cdot 0,5^1$$

$$0,5^{\log_3 x} + 4 = 2 \cdot 0,5^{\log_3 x}$$

Substituce: $a = 0,5^{\log_3 x}$

$$a + 4 = 2a$$

$$a = 4$$

Návrat k původní proměnné:

$$a = 0,5^{\log_3 x} = 4$$

$$0,5^{\log_3 x} = 0,5^{-2}$$

$$\log_3 x = -2$$

$$\log_3 x = \log_3 3^{-2}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$K = \left\{ \frac{1}{9} \right\}$$

Př. 2: Vyřeš rovnici $3 \cdot 4^{\log x} - 25 \cdot 2^{\log x} + 8 = 0$.

Problém: Substituce není zcela jasná, zadání připomíná kvadratickou rovnici.

$$4^{\log x} = (2^2)^{\log x} = (2^{\log x})^2$$

$$3 \cdot 4^{\log x} - 25 \cdot 2^{\log x} + 8 = 0$$

$$3 \cdot (2^{\log x})^2 - 25 \cdot 2^{\log x} + 8 = 0$$

Substituce: $y = 2^{\log x}$

$$3y^2 - 25y + 8 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3} = \frac{25 \pm 23}{6}$$

$$y_1 = \frac{25 + 23}{6} = 8$$

$$y_2 = \frac{25 - 23}{6} = \frac{1}{3}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = 2^{\log x_1} = 8$$

$$2^{\log x_1} = 2^3$$

$$\log x_1 = 3$$

$$\log x_1 = \log 10^3$$

$$x_1 = 1000$$

$$y_2 = 2^{\log x_2} = \frac{1}{3}$$

$$2^{\log x_2} = \frac{1}{3}$$

$$\log_2 2^{\log x_2} = \log_2 \frac{1}{3}$$

$$\log x_2 \cdot \log_2 2 = \log_2 \frac{1}{3}$$

$$\log x_2 \cdot 1 = -\log_2 3$$

$$\log x_2 = \log 10^{-\log_2 3}$$

$$x_2 = 10^{-\log_2 3}$$

$$K = \{1000; 10^{-\log_2 3}\}$$

Pedagogická poznámka: Obě předchozí rovnice jsou exponenciální, takže se opět projeví Ti, kteří mají problémy s pamětí.

Př. 3: Vyřeš rovnici $x + \log_3(3^x + 6) = 3$.

Problém: Zdánlivě neřešitelné, logaritmus nejde rozdělit (obsahuje součet), x se vyskytuje ve zcela odlišných situacích \Rightarrow přepíšeme si $x = \log_3 3^x$, abychom zapsali obě x podobně (jako exponent mocniny 3).

$$\log_3 3^x + \log_3(3^x + 6) = 3$$

$$\log_3 [3^x (3^x + 6)] = \log_3 3^3$$

$$3^x (3^x + 6) = 27$$

Substituce: $y = 3^x$

$$y(y + 6) = 27$$

$$y^2 + 6y - 27 = 0$$

$$(y + 9)(y - 3) = 0$$

$$y_1 = -9$$

$$y_2 = 3$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = 3^{x_1} = -9 \text{ nejde}$$

$$y_2 = 3^{x_2} = 3$$

$$3^{x_2} = 3^1$$

$$x_2 = 1$$

$$K = \{1\}$$

Pedagogická poznámka: Trik na vyřešení předchozího příkladu těžko někdo ze studentů objeví, nemá tedy cenu nechat je dlouho přemýšlet.

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic:
$$\begin{aligned} 2x + y &= 12 \\ \log_4 x + \log_4 y &= 2 \end{aligned}$$

Situace: Jedna rovnice je s logaritmy, druhá bez nich \Rightarrow nepůjde použít substituci ani přímé řešení \Rightarrow zkusíme upravit druhou rovnici tak, aby z ní zmizely logaritmy:

$$\log_4 x + \log_4 y = 2$$

$$\log_4 xy = \log_4 4^2 \text{ odlogaritmujeme}$$

$$xy = 16$$

Z první rovnice vyjádříme y : $2x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 2x$.

Dosadíme do druhé rovnice: $xy = x(12 - 2x) = 16$.

$$12x - 2x^2 = 16 \quad /:2$$

$$6x - x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-4)(x-2) = 0$$

- $x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 12 - 2x_1 = 12 - 2 \cdot 4 = 4$
- $x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 12 - 2x_2 = 12 - 2 \cdot 2 = 8$

$$K = \{[4;4]; [2;8]\}$$

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic:
$$\begin{cases} \log x^2 + \log y^3 = 5 \\ \log xy = 3 \end{cases}$$

Situace: Máme dvě možnosti:

- převést rovnice na tvar: $\log \text{vyraz1} = \log \text{vyraz2}$ a odlogaritmovat (získáme součiny mocnin x a y),
- upravit rovnice tak, aby se v nich vyskytoval pouze $\log x$ a $\log y$ a použít substituci

\Rightarrow vyhneme se mocninám \Rightarrow použijeme druhou možnost.

$$2\log x + 3\log y = 5$$

$$\log x + \log y = 3$$

Substituce: $a = \log x$, $b = \log y$

$$2a + 3b = 5$$

$$a + b = 3$$

$$\underline{\hspace{1.5cm}} \quad 2a + 3b = 5$$

$$\begin{array}{r} \llbracket 1 \rrbracket - 2 \llbracket 2 \rrbracket \\ \hline b = -1 \end{array}$$

dopočteme a : $2a + 3b = 2a + 3(-1) = 5 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Návrat k původní proměnné:

$$a = 4 = \log x \Rightarrow \log 10^4 = \log x \Rightarrow x = 10000$$

$$b = -1 = \log y \Rightarrow \log 10^{-1} = \log y \Rightarrow y = 0,1$$

$$K = \{[10000; 0,1]\}$$

Př. 6: Vyřeš soustavu rovnic:
$$\begin{cases} \log_2^2 2x - \log_2 x^2 + \log_2 y = 9 \\ 3\log x^2 + \log y^2 = \log y + \log x^4 \end{cases}$$

Situace: První rovnice vede jednoznačně na substituci (obsahuje druhou mocninu logaritmu).

Problém: Druhá rovnice obsahuje logaritmy při jiném základu.

Řešení: Z druhé rovnice získáme vztah mezi x a y , který použijeme v první rovnici na dosažení.

$$3\log x^2 + \log y^2 = \log y + \log x^4$$

$$\log(x^2)^3 + \log y^2 = \log x^4 y$$

$$\log x^6 y^2 = \log y x^4 \text{ - odlogaritmuje}$$

$$x^6 y^2 = y x^4$$

$$y = x^{-2}$$

Dosadíme do první rovnice:

$$\log_2^2 2x - \log_2 x^2 + \log_2 x^{-2} = 9$$

$$(\log_2 2x)^2 - \log_2 x^2 + \log_2 x^{-2} = 9$$

$$(\log_2 2 + \log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 2\log_2 x = 9$$

$$(1 + \log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 2\log_2 x = 9$$

Substituce: $a = \log_2 x$

$$(1 + a)^2 - 2a - 2a = 9$$

$$1 + 2a + a^2 - 2a - 2a = 9$$

$$a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$(a - 4)(a + 2) = 0$$

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = -2$$

Návrat k původní proměnné:

$$a_1 = \log_2 x_1 = 4$$

$$\log_2 x_1 = \log_2 2^4$$

$$x_1 = 16$$

$$y_1 = x_1^{-2} = 16^{-2} = \frac{1}{256}$$

$$a_2 = \log_2 x_2 = -2$$

$$\log_2 x_2 = \log_2 2^{-2}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}$$

$$y_2 = x_2^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$$

$$K = \left\{ \left[16; \frac{1}{256} \right]; \left[\frac{1}{4}; 16 \right] \right\}$$

Př. 7: Petáková:

strana 37, cvičení 24 d)

strana 37, cvičení 23 a), e)

strana 36, cvičení 21 b), c), d)

strana 37, cvičení 22 c), d), e)

Shrnutí: Řešení některých rovnic můžeme najít tím, že se pokusíme napsat neznámou podobným způsobem.