2.9.22 Logaritmické rovnice IV

Předpoklady: 2921

Př. 1: Vyřeš rovnici $\log_2 \frac{4}{x} + \log_2^2 2x = 9$.

Podmínky: $x > 0$
Problém: Nemáme co substituovat (logaritmy obsahují různé výrazy), i když to vypadá, že rovnice je kvadratická pro $\log_2 x$ $\Rightarrow$ zkusíme pomocí vzorců rozebrat výrazy v logaritmech, abychom získali pouze $\log_2 x$.

$\log_2 \frac{4}{x} + \log_2^2 2x = 9$ - abychom neudělali zbytečnou chybu, napíšeme si $\log_2^2 2x = (\log_2 2x)^2$

$$\log_2 \frac{4}{x} + (\log_2 2x)^2 = 9$$

$$\log_2 4 - \log_2 x + (\log_2 2 + \log_2 x)^2 = 9$$

$$2 - \log_2 x + (1 + \log_2 x)^2 = 9$$

Substituce: $y = \log_2 x$

$$2 - y + (1 + y)^2 = 9$$

$$2 - y + 1 + 2y + y^2 = 9$$

$$y^2 + y + 3 = 9$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$(y+3)(y-2) = 0$$

$y_1 = -3$ $\quad$ $y_2 = 2$

Návrat k původní proměnné:

$y_1 = \log_2 x_1 = -3$
$\log_2 x_1 = \log_2 2^{-3}$
$x_1 = \frac{1}{8}$

$y_2 = \log_2 x_2 = 2$
$\log_2 x_2 = \log_2 2^2$
$x_2 = 4$

$$K = \left\{\frac{1}{8}; 4\right\}$$

Př. 2: Vyřeš rovnici $\log_2 8x^2 + \log_2^2 2x^2 = 8$.

Podmínky: $x \neq 0$ (v logaritmech jsou pouze druhé mocniny x $\Rightarrow$ každý výsledek můžeme použít i s jeho opačným číslem).
Problém: podobně jako v předchozím příkladě musíme před substitucí zjednodušit výrazy uvnitř logaritmů.

$$\log_2 8x^2 + \log_2^2 2x^2 = 8$$

$$\log_2 8 + \log_2 x^2 + \left(\log_2 2 + \log_2 x^2\right)^2 = 8$$

$3+2\log_2 x+(1+2\log_2 x)^2=8$

Substituce: $y=\log_2 x$

$3+2y+(1+2y)^2=8$

$3+2y+1+4y+4y^2=8$

$4y^2+6y-4=0 \quad /:2$

$2y^2+3y-2=0$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm 5}{4}$$

$y_1=\frac{-3-5}{4}=-2 \qquad y_2=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}$

Návrat k původní proměnné:

$y_1=\log_2 x_1=-2$

$\log_2 x_1=\log_2 2^{-2}$

$x_1=\frac{1}{4}$

$y_2=\log_2 x_2=\frac{1}{2}$

$\log_2 x_2=\log_2 2^{\frac{1}{2}}$

$x_2=\sqrt{2}$

$K=\left\{\pm\frac{1}{4};\pm\sqrt{2}\right\}$ Ke každému vypočtenému kořenu přidáme jeho opačné číslo.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu záleží na substituci, kterou studenti zvolí. Občas někteří substituují $y=\log_2 x^2$ (není to zase tak vzácné). Pokud se někdo takový objeví, nechte studenty příklad dopočítat a pak je vyzvěte, aby zkusili vysvětlit fakt, že většina třídy má polovinu kořenů.

Př. 3: Vyřeš rovnici $x^{\log_3 x}=27x^2$.

Podmínky: $x>0$.

Problém: neznámá se vyskytuje v exponentu $\Rightarrow$ rovnici zlogaritmujeme při základu 3 (tento základ už se v rovnici vyskytuje), pak budeme moci použít větu pro exponent uvnitř logaritmu (jak už jsme dělali u exponenciálních rovnic).

$x^{\log_3 x}=27x^2$ - zlogaritmujeme rovnici při základu 3

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 27x^2$

$\log_3 x\cdot\log_3 x=\log_3 27+\log_3 x^2$

$\log_3 x\cdot\log_3 x=\log_3 3^3+2\log_3 x$

Substituce: $y=\log_3 x$

$y^2=3+2y$

$y^2-2y-3=0$

$(y-3)(y+1)=0$

$y_1=3 \qquad y_2=-1$

Návrat k původní proměnné:

$y_1=\log_3 x_1=3 \qquad y_2=\log_3 x_2=-1$

$\log_3 x_1 = \log_3 3^3$

$x_1 = 27$

$\log_3 x_2 = \log_3 3^{-1}$

$x_2 = \frac{1}{3}$

$K = \left\{\frac{1}{3}; 27\right\}$

Př. 4: Vyřeš rovnici $\log_2 x - 2\log_4 x + \log_8 x = 1$.

Podmínky: $x > 0$.
Problém: Každý logaritmus má jiný základ $\Rightarrow$ použijeme vzorec pro změnu základu a převedeme všechno na základ 2.

$\log_2 x - 2\log_4 x + \log_8 x = 1$

$\log_2 x - 2\frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = 1$

$\log_2 x - 2\frac{\log_2 x}{2} + \frac{\log_2 x}{3} = 1$

$\log_2 x - \log_2 x + \frac{\log_2 x}{3} = 1$

$\frac{\log_2 x}{3} = 1$

$\log_2 x = 3$

$\log_2 x = \log_2 2^3$

$x = 8$ $\qquad K = \{8\}$

Př. 5: Vyřeš rovnici $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$.

Podmínky: $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq \frac{1}{4}$.
Problém: Neznámá je v základech logaritmů $\Rightarrow$ převedeme logaritmy na jiný základ (konkrétně základ 2, protože logaritmy obsahují spousty dvojek).

$\frac{\log_2 2}{\log_2 x} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 2x} = \frac{\log_2 2}{\log_2 4x}$

$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 x} = \frac{1}{\log_2 4 + \log_2 x}$

$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1 + \log_2 x} = \frac{1}{2 + \log_2 x}$

Substituce: $y = \log_2 x$

$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{1+y} = \frac{1}{2+y} \qquad / \cdot y(1+y)(2+y)$

$2 + y = y(1+y)$

$2 = y^2$

$y_1 = \sqrt{2}$ $\qquad y_2 = -\sqrt{2}$

Návrat k původní proměnné:

$y_1 = \log_2 x_1 = \sqrt{2}$

$\log_2 x_1 = \log_2 2^{\sqrt{2}}$

$x_1 = 2^{\sqrt{2}}$

$y_2 = \log_2 x_2 = -\sqrt{2}$

$\log_2 x_2 = \log_2 2^{-\sqrt{2}}$

$x_2 = 2^{-\sqrt{2}}$

$K = \left\{2^{-\sqrt{2}}; 2^{\sqrt{2}}\right\}$

Př. 6: Petáková:
strana 36, cvičení 17 b), d)
strana 36, cvičení 18 a), e), f)
strana 36, cvičení 19 c), f)
strana 36, cvičení 20 a), d)

Shrnutí: Pokud se neznámá vyskytuje v logaritmech o různých základech, můžeme použít vzorec na změnu základu .