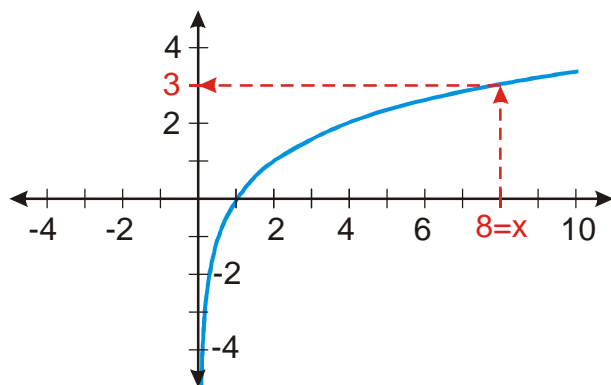


2.9.19 Logaritmické rovnice I

Př. 1: Vyřeš rovnici $\log_2 x = 3$.

Podmínka: $x > 0$ (do logaritmu nemůžeme dosadit cokoliv).

Jde o číslo $2^3 = 8$. $K = \{8\}$



Př. 2: Napiš následující čísla jako logaritmy při uvedeném základu:

- a) $3 \{\log_{10}\}$ b) $2 \{\log_5\}$ c) $-1 \{\log_{0,5}\}$ d) $0,5 \{\log_4\}$
 e) $0 \{\log_\pi\}$ f) $\sqrt{2} \{\log_3\}$

a) $3 = \log_{10} 10^3 = \log_{10} 1000$

b) $2 = 2 \log_5 5 = \log_5 5^2 = \log_5 25$

c) $-1 = \log_{0,5} 0,5^{-1} = \log_{0,5} 2$

d) $0,5 = \log_4 4^{0,5} = \log_4 2$

e) $0 = \log_\pi \pi^0 = \log_\pi 1$

f) $\sqrt{2} = \sqrt{2} \log_3 3 = \log_3 3^{\sqrt{2}}$

Př. 3: Vyřeš rovnice:

- a) $\log_2(x-2) = 4$ b) $3 \log_2(3x+1) = 6$
 c) $\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = -1$ d) $\ln \log_2 \log_{0,5} x = 0$ (jinak $\ln(\log_2[\log_{0,5} x]) = 0$)
 e) $\log_8(2 \log_3[1 + \log_2\{2 - \log_{0,5} x\}]) = \frac{1}{3}$

a) $\log_2(x-2) = 4$

b) $3 \log_2(3x+1) = 6$

Podmínka: $x > 2$ (nemůžeme dosadit cokoliv).

Podmínka: $3x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}$.

$\log_2(x-2) = 4$

$\log_2(x-2) = \log_2 2^4$

$\log_2(3x+1) = 2$

$\log_2(x-2) = \log_2 16 \quad x-2 = 16$

$\log_2(3x+1) = \log_2 2^2$ - odlogaritmuje

$x = 18$

$K = \{18\}$

$3x+1 = 4 \quad 3x = 3$

$x = 1 \quad K = \{1\}$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = -1$

d) $\ln \log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = 0$ Podmínka: $x > 0$.

Podmínka: $x > -1$.

$\ln \log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = \ln 1$ - odlogaritmuje

$\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 2$ - odlogaritmuje

$\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = \log_{\frac{1}{3}} 3$ - odlogaritmuje

$\log_{\frac{1}{2}} x = 2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$ - odlogaritmuje

$1+x = 3$

$x = 2$

$K = \{2\}$

$x = \frac{1}{4} \quad K = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

$$e) \log_8 \left(2 \log_3 \left[1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} \right] \right) = \frac{1}{3}$$

Podmínka: $x > 0$.

$$\log_8 \left(2 \log_3 \left[1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} \right] \right) = \log_8 2 - \text{odlogaritmuje}$$

$$\log_3 \left[1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} \right] = \log_3 3 \quad 1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} = 3$$

$$\log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} = \log_2 2^2 \quad 2 - \log_{0,5} x = 4$$

$$-\log_{0,5} x = 2 \quad \log_{0,5} x = -2 = \log_{0,5} 0,5^{-2} \quad x = 4 \quad K = \{4\}$$

Př. 4: Vyřeš rovnice:

a) $\log_2(x^2 + x) = \log_2(-2x)$

b) $\log_2(x^2 - x) = \log_2(3 - 3x)$

c) $2 \log x = \log(x + 6)$

a) $\log_2(x^2 + x) = \log_2(-2x)$

Podmínky: $x^2 + x > 0$, $-2x > 0$, zkontrolujeme dosazením až získáme kandidáty na kořeny.

$$\log_2(x^2 + x) = \log_2(-2x)$$

$$x^2 + x = -2x$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -3$$

Ověření podmínek:

$$x_1 = 0: 0^2 + 0 > 0 - \text{nevyhovuje}$$

$$x_2 = -3: (-3)^2 + (-3) = 9 - 3 = 6 > 0$$

$$-2x = -2(-3) = 6 > 0$$

$$K = \{-3\}$$

c) $2 \log x = \log(x + 6)$

Podmínky: $x > 0$, $x + 6 > 0$, zkontrolujeme dosazením až získáme kandidáty na kořeny.

$$2 \log x = \log(x + 6) - \text{nejde odlogaritmovat, na levé straně není logaritmus}$$

$$\log x^2 = \log(x + 6) - \text{teď už můžeme odlogaritmovat}$$

$$x^2 = x + 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$

Ověření podmínek:

$$x_1 = 3: 3 > 0$$

$$x_2 = -2: -2 < 0 \text{ nevyhovuje}$$

$$K = \{3\}$$

Př. 5: Petáková:

strana 35, cvičení 9 b), c), e), f), g), h)

strana 35, cvičení 10 c), d)