

## 2.9.19 Logaritmické rovnice I

### Předpoklady: 2915

**Pedagogická poznámka:** Stejně jako u exponenciálních rovnic a rozkladů na součin bereme logaritmické rovnice jako nácvik „výběru metody“. Sestavujeme si arzenál metod a na konci máme hodinu, ve které jsou pomíchané různé druhy rovnic a studenti musejí sami vybírat nejvhodnější metodu řešení.

Logaritmické rovnice - rovnice s neznámou v logaritmu.

Co máme k dispozici?

- definice logaritmu:  $y = \log_a x$  právě když  $x = a^y$ ,
- vzorce pro logaritmy:  $\log_a r \cdot s = \log_a r + \log_a s$ ,  $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$ ,

$$\log_a r^s = s \cdot \log_a r, \quad \log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}.$$

**Př. 1:** Vyřeš rovnici  $\log_2 x = 3$ .

Podmínka:  $x > 0$  (do logaritmu nemůžeme dosadit cokoliv).

Připomíná to nejjednodušší exponenciální rovnice typu  $2^x = 8$ .

Jde řešit z paměti: Ptáme se jaké číslo vznikne, když umocníme 2 (základ logaritmu) na třetí (hodnota logaritmu = hodnota exponentu).

Jde o číslo  $2^3 = 8$ .  $K = \{8\}$

Jak postup zobecnit (ne všechno půjde z paměti)?

Jako u exponenciálních rovnic, napíšeme pravou stranu jako logaritmus:

$$\log_2 x = 3$$

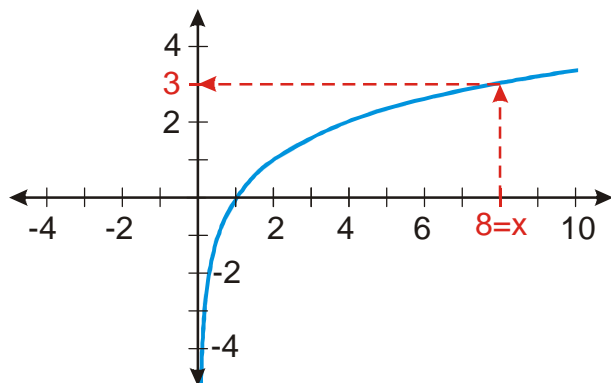
$$\log_2 x = \log_2 2^3$$

$$\log_2 x = \log_2 8$$

Rozebereme vzniklou rovnici:

- levá strana:  $L = \log_2 x$  - hodnota funkce  $y = \log_2 x$  pro neznámé číslo  $x$
- pravá strana:  $P = \log_2 8$  - hodnota funkce  $y = \log_2 x$  pro číslo 8

Obě strany se mají rovnat  $\Rightarrow$  funkce  $y = \log_2 x$  má pro  $x$  i pro 8 stejnou hodnotu.



Z grafu je vidět, že funkce  $y = \log_2 x$  je prostá (ke každému  $y$  má pouze jedno  $x$ )  $\Rightarrow$  pokud má funkce  $y = \log_2 x$  pro  $x$  i pro 8 stejnou hodnotu (konkrétně  $y = 3$ ) musí se  $x$  a 8 rovnat (existuje pouze jedna hodnota  $x$ , ze které se dostaneme přes logaritmus k 3)  $\Rightarrow x = 8$ .

I všechny ostatní logaritmické funkce  $y = \log_a x$  jsou prosté  $\Rightarrow$  postup můžeme použít obecně.

**Pokud se podaří logaritmickou rovnicí upravit do tvaru  $\log_a(\text{výraz1}) = \log_a(\text{výraz2})$ , můžeme přejít k rovnici  $\text{výraz1} = \text{výraz2}$ . Protože funkce  $y = \log_a x$  je prostá, je tato úprava ekvivalentní. Této úpravě se říká odlogaritmování.**

Při řešení rovnic budeme často potřebovat zapsat nějaké číslo jako logaritmus při určitém základu. Jak zapsat 3 jako logaritmus při základu 2?

Možné cesty:

- $3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot \log_2 2 = \log_2 2^3$ ,
- $\log_2 x = 3$  právě když  $x = 2^3$  (umocňujeme základ a hodnota logaritmu je exponent).

**Př. 2:** Napiš následující čísla jako logaritmy při uvedeném základu:

- a)  $3 \{\log_{10}\}$       b)  $2 \{\log_5\}$       c)  $-1 \{\log_{0,5}\}$       d)  $0,5 \{\log_4\}$   
 e)  $0 \{\log_\pi\}$       f)  $\sqrt{2} \{\log_3\}$

a)  $3 = \log_{10} 10^3 = \log_{10} 1000$

b)  $2 = 2 \log_5 5 = \log_5 5^2 = \log_5 25$

c)  $-1 = \log_{0,5} 0,5^{-1} = \log_{0,5} 2$

d)  $0,5 = \log_4 4^{0,5} = \log_4 2$

e)  $0 = \log_\pi \pi^0 = \log_\pi 1$

f)  $\sqrt{2} = \sqrt{2} \log_3 3 = \log_3 3^{\sqrt{2}}$

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad tak sice vypadá jako ztráta času, ale rozhodně jí není. Studenti mají s převáděním čísel na logaritmy značné problémy (i když jde o trivialitu) a předchozí příklad jim ušetří při řešení rovnic hodně času.

**Př. 3:** Vyřeš rovnice:

- a)  $\log_2(x-2) = 4$       b)  $3 \log_2(3x+1) = 6$   
 c)  $\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = -1$       d)  $\ln \log_2 \log_{0,5} x = 0$  (jinak  $\ln(\log_2[\log_{0,5} x]) = 0$ )  
 e)  $\log_8(2 \log_3[1 + \log_2\{2 - \log_{0,5} x\}]) = \frac{1}{3}$

a)  $\log_2(x-2) = 4$

b)  $3 \log_2(3x+1) = 6$

Podmínka:  $x > 2$  (nemůžeme dosadit cokoliv).

Podmínka:  $3x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}$ .

$\log_2(x-2) = 4$

$\log_2(x-2) = \log_2 2^4$

**Problém:** levá strana není logaritmus  $\Rightarrow$  rovnici vydělíme

$\log_2(x-2) = \log_2 16$  - rovnost logaritmů  $\Rightarrow$

$\log_2(3x+1) = 2$

můžeme odlogaritmovat:

$$x - 2 = 16$$

$$x = 18$$

$$K = \{18\}$$

$$c) \log_{\frac{1}{3}}(1+x) = -1$$

Podmínka:  $x > -1$ .

$$\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = \log_{\frac{1}{3}} 3 - \text{odlogaritmuje}$$

$$1+x = 3$$

$$x = 2$$

$$K = \{2\}$$

$$\log_2(3x+1) = \log_2 2^2 - \text{odlogaritmuje}$$

$$3x+1 = 4$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

$$K = \{1\}$$

$$d) \ln \log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = 0$$

Podmínka:  $x > 0$ .

$$\ln \log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = \ln 1 - \text{odlogaritmuje}$$

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = 1$$

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 2 - \text{odlogaritmuje}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \text{odlogaritmuje}$$

$$x = \frac{1}{4} \quad K = \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

$$e) \log_8 \left( 2 \log_3 \left[ 1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} \right] \right) = \frac{1}{3}$$

Podmínka:  $x > 0$ .

$$\log_8 \left( 2 \log_3 \left[ 1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} \right] \right) = \log_8 8^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_8 \left( 2 \log_3 \left[ 1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} \right] \right) = \log_8 2 - \text{odlogaritmuje}$$

$$2 \log_3 \left[ 1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} \right] = 2 \quad / : 2$$

$$\log_3 \left[ 1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} \right] = 1$$

$$\log_3 \left[ 1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} \right] = \log_3 3 - \text{odlogaritmuje}$$

$$1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} = 3$$

$$\log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} = 2$$

$$\log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} = \log_2 2^2 - \text{odlogaritmuje}$$

$$2 - \log_{0,5} x = 4$$

$$-\log_{0,5} x = 2$$

$$\log_{0,5} x = -2 = \log_{0,5} 0,5^{-2} - \text{odlogaritmuje}$$

$$x = 4$$

$$K = \{4\}$$

**Pedagogická poznámka:** Studenti obcházejí trojku v bodě b) většinou nesmyslně převedením na třetí mocninu uvnitř. Připomínám jim, že nejdřív by měli zkoušet ty nejjednodušší cesty. V bodě d) je třeba studenty popostrčit odstraněním prvního logaritmu, pak již příklad dopočítají.

**Př. 4:** Vyřeš rovnice:

a)  $\log_2(x^2 + x) = \log_2(-2x)$

b)  $\log_2(x^2 - x) = \log_2(3 - 3x)$

c)  $2 \log x = \log(x + 6)$

a)  $\log_2(x^2 + x) = \log_2(-2x)$

Podmínky:  $x^2 + x > 0$ ,  $-2x > 0$ ,  
zkontrolujeme dosazením až získáme  
kandidáty na kořeny.

$$\log_2(x^2 + x) = \log_2(-2x)$$

$$x^2 + x = -2x$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -3$$

Ověření podmínek:

$$x_1 = 0: 0^2 + 0 > 0 \text{ - nevyhovuje}$$

$$x_2 = -3: (-3)^2 + (-3) = 9 - 3 = 6 > 0$$

$$-2x = -2(-3) = 6 > 0$$

$$K = \{-3\}$$

c)  $2 \log x = \log(x + 6)$

Podmínky:  $x > 0$ ,  $x + 6 > 0$ , zkontrolujeme dosazením až získáme kandidáty na kořeny.

$$2 \log x = \log(x + 6) \text{ - nejde odlogaritmovat, levá strana není logaritmus}$$

$$\log x^2 = \log(x + 6) \text{ - teď už můžeme odlogaritmovat}$$

$$x^2 = x + 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$

Ověření podmínek:

$$x_1 = 3: 3 > 0$$

$$x_2 = -2: -2 < 0 \text{ nevyhovuje}$$

$$K = \{3\}$$

b)  $\log_2(x^2 - x) = \log_2(3 - 3x)$

Podmínky:  $x^2 - x > 0$ ,  $3 - 3x > 0$ ,  
zkontrolujeme dosazením až získáme  
kandidáty na kořeny.

$$\log_2(x^2 - x) = \log_2(3 - 3x)$$

$$x^2 - x = 3 - 3x$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = 1$$

Ověření podmínek:

$$x_1 = -3: (-3)^2 - (-3) = 9 + 3 > 0$$

$$3 - 3(-3) = 3 + 9 > 0$$

$$x_2 = 1: 1^2 - 1 = 0 \text{ - nevyhovuje}$$

$$K = \{-3\}$$

**Př. 5:** Petáková:

strana 35, cvičení 9 b), c), e), f), g), h)

strana 35, cvičení 10 c), d)

**Shrnutí:**  $2 = \log_a a^2$  a pak to odlogaritmuje.