2.9.19 Logaritmické rovnice I

Předpoklady: 2915

Pedagogická poznámka: Stejně jako u exponenciálních rovnic a rozkladů na součin bereme logaritmické rovnice jako nácvik „výběru metody“. Sestavujeme si arzenál metod a na konci máme hodinu, ve které jsou pomíchané různé druhy rovnic a studenti musejí sami vybírat nejvhodnější metodu řešení.

Logaritmické rovnice - rovnice s neznámou v logaritmu.
Co máme k dispozici?

- definice logaritmu: $y = \log_a x$ právě když $x = a^y$,
- vzorce pro logaritmy: $\log_a r \cdot s = \log_a r + \log_a s$, $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$,

  $\log_a r^s = s \cdot \log_a r$, $\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$.

Př. 1: Vyřeš rovnici $\log_2 x = 3$.

Podmínka: $x > 0$ (do logaritmu nemůžeme dosadit cokoliv).
Připomíná to nejjednodušší exponenciální rovnice typu $2^x = 8$.
Jde řešit zpaměti: Ptáme se jaké číslo vznikne, když umocníme 2 (základ logaritmu) na třetí (hodnota logaritmu = hodnota exponentu).
Jde o číslo $2^3 = 8$. $K = \{8\}$

Jak postup zobecnit (ne všechno půjde zpaměti)?
Jako u exponenciálních rovnic, napíšeme pravou stranu jako logaritmus:

$\log_2 x = 3$

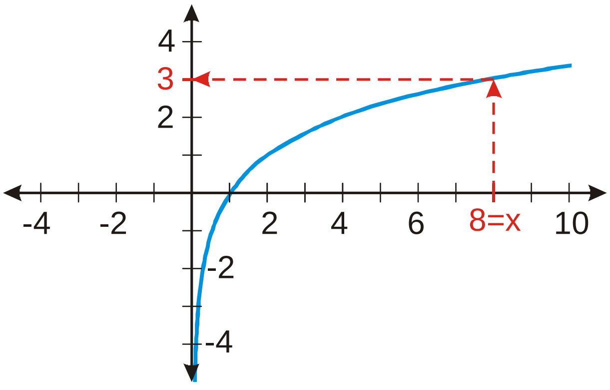
$\log_2 x = \log_2 2^3$

$\log_2 x = \log_2 8$

Rozebereme vzniklou rovnici:

- levá strana: $L = \log_2 x$ - hodnota funkce $y = \log_2 x$ pro neznámé číslo x
- pravá strana: $P = \log_2 8$ - hodnota funkce $y = \log_2 x$ pro číslo 8

Obě strany se mají rovnat $\Rightarrow$ funkce $y = \log_2 x$ má pro x i pro 8 stejnou hodnotu.



Z grafu je vidět, že funkce $y=\log_2 x$ je prostá (ke každému *y* má pouze jedno *x*) $\Rightarrow$ pokud má funkce $y=\log_2 x$ pro *x* i pro 8 stejnou hodnotu (konkrétně $y=3$) musí se *x* a 8 rovnat (existuje pouze jedna hodnota *x*, ze které se dostaneme přes logaritmus k 3) $\Rightarrow$ $x=8$.

I všechny ostatní logaritmické funkce $y=\log_a x$ jsou prosté $\Rightarrow$ postup můžeme použít obecně.

Pokud se podaří logaritmickou rovnici upravit do tvaru $\log_a(\textit{výraz}1)=\log_a(\textit{výraz}2)$, můžeme přejít k rovnici $\textit{výraz}1=\textit{výraz}2$. Protože funkce $y=\log_a x$ je prostá, je tato úprava ekvivalentní. Této úpravě se říká odlogaritmování.

Při řešení rovnic budeme často potřebovat zapsat nějaké číslo jako logaritmus při určitém základu. Jak zapsat 3 jako logaritmus při základu 2?
Možné cesty:

- $3=3\cdot 1=3\cdot\log_2 2=\log_2 2^3$,
- $\log_2 x=3$ právě když $x=2^3$ (umocňujeme základ a hodnota logaritmu je exponent) .

Př. 2: Napiš následující čísla jako logaritmy při uvedeném základu:
a) $3\ \{\log_{10}\}$ b) $2\ \{\log_5\}$ c) $-1\ \{\log_{0,5}\}$ d) $0,5\ \{\log_4\}$
e) $0\ \{\log_\pi\}$ f) $\sqrt{2}\ \{\log_3\}$

a) $3=\log_{10}10^3=\log_{10}1000$
b) $2=2\log_5 5=\log_5 5^2=\log_5 25$
c) $-1=\log_{0,5}0,5^{-1}=\log_{0,5}2$
d) $0,5=\log_4 4^{0,5}=\log_4 2$
e) $0=\log_\pi \pi^0=\log_\pi 1$
f) $\sqrt{2}=\sqrt{2}\log_3 3=\log_3 3^{\sqrt{2}}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad tak sice vypadá jako ztráta času, ale rozhodně jí není. Studenti mají s převáděním čísel na logaritmy značné problémy (i když jde o trivialitu) a předchozí příklad jim ušetří při řešení rovnic hodně času.

Př. 3: Vyřeš rovnice:
a) $\log_2(x-2)=4$ b) $3\log_2(3x+1)=6$
c) $\log_{\frac{1}{3}}(1+x)=-1$ d) $\ln\log_2\log_{0,5}x=0$ (jinak $\ln\left(\log_2\left[\log_{0,5}x\right]\right)=0$)
e) $\log_8\left(2\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}\right]\right)=\frac{1}{3}$

a) $\log_2(x-2)=4$
Podmínka: $x>2$ (nemůžeme dosadit cokoliv).
$\log_2(x-2)=4$
$\log_2(x-2)=\log_2 2^4$
$\log_2(x-2)=\log_2 16$ - rovnost logaritmů $\Rightarrow$

b) $3\log_2(3x+1)=6$
Podmínka: $3x+1>0$ $\Rightarrow$ $x>-\frac{1}{3}$.
Problém: levá strana není logaritmus $\Rightarrow$ rovnici vydělíme
$\log_2(3x+1)=2$

můžeme odlogaritmovat:

$x-2=16$

$x=18$ $\qquad K=\{18\}$

$\log_2(3x+1)=\log_2 2^2$ - odlogaritmujeme

$3x+1=4$

$3x=3$

$x=1$ $\qquad K=\{1\}$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(1+x)=-1$

Podmínka: $x>-1$.

$\log_{\frac{1}{3}}(1+x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$\log_{\frac{1}{3}}(1+x)=\log_{\frac{1}{3}}3$ - odlogaritmujeme

$1+x=3$

$x=2$ $\qquad K=\{2\}$

d) $\ln\log_2\log_{\frac{1}{2}}x=0$

Podmínka: $x>0$.

$\ln\log_2\log_{\frac{1}{2}}x=\ln 1$ - odlogaritmujeme

$\log_2\log_{\frac{1}{2}}x=1$

$\log_2\log_{\frac{1}{2}}x=\log_2 2$ - odlogaritmujeme

$\log_{\frac{1}{2}}x=2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$ - odlogaritmujeme

$x=\frac{1}{4}$ $\qquad K=\left\{\frac{1}{4}\right\}$

e) $\log_8\left(2\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}\right]\right)=\frac{1}{3}$

Podmínka: $x>0$.

$\log_8\left(2\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}\right]\right)=\log_8 8^{\frac{1}{3}}$

$\log_8\left(2\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}\right]\right)=\log_8 2$ - odlogaritmujeme

$2\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}\right]=2 \quad /:2$

$\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}\right]=1$

$\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}\right]=\log_3 3$ - odlogaritmujeme

$1+\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}=3$

$\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}=2$

$\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}=\log_2 2^2$ - odlogaritmujeme

$2-\log_{0,5}x=4$

$-\log_{0,5}x=2$

$\log_{0,5}x=-2=\log_{0,5}0,5^{-2}$ - odlogaritmujeme

$x=4$ $\qquad K=\{4\}$

Pedagogická poznámka: Studenti obcházejí trojku v bodě b) většinou nesmyslně převedením na třetí mocninu uvnitř. Připomínám jim, že nejdřív by měli zkoušet ty nejjednodušší cesty.

V bodě d) je třeba studenty popostrčit odstraněním prvního logaritmu, pak již příklad dopočítají.

Př. 4: Vyřeš rovnice:

a) $\log_2\left(x^2+x\right)=\log_2\left(-2x\right)$ b) $\log_2\left(x^2-x\right)=\log_2\left(3-3x\right)$

c) $2\log x=\log\left(x+6\right)$

a) $\log_2\left(x^2+x\right)=\log_2\left(-2x\right)$

Podmínky: $x^2+x>0$, $-2x>0$, zkontrolujeme dosazením až získáme kandidáty na kořeny.

$\log_2\left(x^2+x\right)=\log_2\left(-2x\right)$

$x^2+x=-2x$

$x^2+3x=0$

$x\left(x+3\right)=0$

$x_1=0 \qquad x_2=-3$

Ověření podmínek:

$x_1=0$: $0^2+0>0$ - nevyhovuje

$x_2=-3$: $\left(-3\right)^2+\left(-3\right)=9-3=6>0$

$-2x=-2\left(-3\right)=6>0$

$K=\{-3\}$

b) $\log_2\left(x^2-x\right)=\log_2\left(3-3x\right)$

Podmínky: $x^2-x>0$, $3-3x>0$, zkontrolujeme dosazením až získáme kandidáty na kořeny.

$\log_2\left(x^2-x\right)=\log_2\left(3-3x\right)$

$x^2-x=3-3x$

$x^2+2x-3=0$

$\left(x+3\right)\left(x-1\right)=0$

$x_1=-3 \qquad x_2=1$

Ověření podmínek:

$x_1=-3$: $\left(-3\right)^2-\left(-3\right)=9+3>0$

$3-3\left(-3\right)=3+9>0$

$x_2=1$: $1^2-1=0$ - nevyhovuje

$K=\{-3\}$

c) $2\log x=\log\left(x+6\right)$

Podmínky: $x>0$, $x+6>0$, zkontrolujeme dosazením až získáme kandidáty na kořeny.

$2\log x=\log\left(x+6\right)$ - nejde odlogaritmovat, levá strana není logaritmus

$\log x^2=\log\left(x+6\right)$ - teď už můžeme odlogaritmovat

$x^2=x+6$

$x^2-x-6=0$

$\left(x-3\right)\left(x+2\right)=0$

$x_1=3 \qquad x_2=-2$

Ověření podmínek:

$x_1=3$: $3>0$

$x_2=-2$: $-2<0$ nevyhovuje

$K=\{3\}$

Př. 5: Petáková:
strana 35, cvičení 9 b), c), e), f), g), h)
strana 35, cvičení 10 c), d)

Shrnutí: $2=\log_a a^2$ a pak to odlogaritmujeme.