

## 2.9.18 Řešení exponenciálních rovnic logaritmováním

**Př. 1:** Vyřeš rovnici  $3^{x+1} = 2^{3-2x}$ .

$$3^{x+1} = 2^{3-2x} \quad \log 3^{x+1} = \log 2^{3-2x} \quad (x+1)\log 3 = (3-2x)\log 2 \text{ roznásobíme závorky.}$$

$$x \log 3 + \log 3 = 3 \log 2 - 2x \log 2 \quad x(\log 3 + 2 \log 2) = 3 \log 2 - \log 3$$

$$x = \frac{3 \log 2 - \log 3}{\log 3 + 2 \log 2} \quad K = \left\{ \frac{3 \log 2 - \log 3}{\log 3 + 2 \log 2} \right\}$$

**Př. 2:** Uprav výsledek předchozího příkladu tak, aby v čitateli i jmenovateli zlomku byl jediný logaritmus z jednoho čísla. Pak vypočti pomocí kalkulačky přibližnou hodnotu řešení předchozí rovnice a dosazením ověř správnost výsledku.

$$x = \frac{3 \log 2 - \log 3}{\log 3 + 2 \log 2} = \frac{\log 2^3 - \log 3}{\log 3 + \log 2^2} = \frac{\log \left( \frac{2^3}{3} \right)}{\log (3 \cdot 2^2)} = \frac{\log \frac{8}{3}}{\log 12} \doteq 0,3947$$

$$\text{Dosadíme: } 3^{0,3947+1} = 2^{3-2 \cdot 0,3947} \quad 3^{1,3947} = 2^{2,2106} \quad 4,6285 = 4,6286$$

**Př. 3:** Vyřeš rovnici  $(\sqrt{5})^{2x+1} = (7^2)^{1-x}$ . Logaritmuji se základem  $e$ . Výsledek uprav do tvaru podílu dvou logaritmů. Uveď přibližný výsledek s přesností na 6 desetinných míst.

$$\left( 5^{\frac{1}{2}} \right)^{2x+1} = 7^{2(1-x)} \quad 5^{x+\frac{1}{2}} = 7^{2-2x} \quad \ln \left( 5^{x+\frac{1}{2}} \right) = \ln (7^{2-2x}) \quad \left( x + \frac{1}{2} \right) \ln 5 = (2-2x) \ln 7$$

$$x \ln 5 + 0,5 \ln 5 = 2 \ln 7 - 2x \ln 7 \quad x(\ln 5 + 2 \ln 7) = 2 \ln 7 - 0,5 \ln 5$$

$$x = \frac{2 \ln 7 - 0,5 \ln 5}{\ln 5 + 2 \ln 7} = \frac{\ln 49 - \ln \sqrt{5}}{\ln 5 + \ln 49} = \frac{\ln \frac{49}{\sqrt{5}}}{\ln 245} \doteq 0,561163$$

$$K = \left\{ \frac{2 \ln 7 - 0,5 \ln 5}{\ln 5 + 2 \ln 7} \right\}$$

**Př. 4:** Vyřeš rovnici:  $4 \cdot 2^{2x-1} = \frac{3^{x+3}}{9}$ . Logaritmuji o různých základech. Spočti a porovnej přibližné výsledky z různých způsobů řešení.

$$2^2 \cdot 2^{2x-1} = \frac{3^{x+3}}{3^2} \quad 2^{2x+1} = 3^{x+1}$$

- 10 a  $e$  – snadný výpočet na kalkulačce
- 2 a 3 – na jedné straně rovnice zmizí logaritmus

$$2^{2x+1} = 3^{x+1}$$

$$2^{2x+1} = 3^{x+1}$$

$$\log (2^{2x+1}) = \log (3^{x+1})$$

$$\ln (2^{2x+1}) = \ln (3^{x+1})$$

$$(2x+1)\log 2 = (x+1)\log 3$$

$$(2x+1)\ln 2 = (x+1)\ln 3$$

$$2x \log 2 + \log 2 = x \log 3 + \log 3$$

$$2x \ln 2 + \ln 2 = x \ln 3 + \ln 3$$

$$2x \log 2 - x \log 3 = \log 3 - \log 2$$

$$2x \ln 2 - x \ln 3 = \ln 3 - \ln 2$$

$$x(2\log 2 - \log 3) = \log 3 - \log 2$$

$$x = \frac{\log 3 - \log 2}{2\log 2 - \log 3} = \frac{\log \frac{3}{2}}{\log \frac{4}{3}} \doteq 1,409421$$

$$2^{2x+1} = 3^{x+1}$$

$$\log_2(2^{2x+1}) = \log_2(3^{x+1})$$

$$(2x+1)\log_2 2 = (x+1)\log_2 3$$

$$(2x+1) \cdot 1 = x\log_2 3 + 1\log_2 3$$

$$2x - x\log_2 3 = \log_2 3 - 1$$

$$x(2 - \log_2 3) = \log_2 3 - 1$$

$$x = \frac{\log_2 3 - 1}{2 - \log_2 3} \doteq 1,409421$$

$$x(2\ln 2 - \ln 3) = \ln 3 - \ln 2$$

$$x = \frac{\ln 3 - \ln 2}{2\ln 2 - \ln 3} = \frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln \frac{4}{3}} \doteq 1,409421$$

$$2^{2x+1} = 3^{x+1}$$

$$\log_3(2^{2x+1}) = \log_3(3^{x+1})$$

$$(2x+1)\log_3 2 = (x+1)\log_3 3$$

$$2x\log_3 2 + \log_3 2 = (x+1) \cdot 1$$

$$2x\log_3 2 - x = 1 - \log_3 2$$

$$x(2\log_3 2 - 1) = 1 - \log_3 2$$

$$x = \frac{1 - \log_3 2}{2\log_3 2 - 1} \doteq 1,409421$$

**Př. 5:** Vyřeš rovnici  $2 \cdot 3^{2x} = 5^{x-1}$ .

$$\log(2 \cdot 3^{2x}) = \log(5^{x-1}) \quad \log 2 + \log(3^{2x}) = \log(5^{x-1}) \quad \log 2 + 2x\log 3 = (x-1)\log 5$$

$$\log 2 + 2x\log 3 = x\log 5 - \log 5$$

$$x(2\log 3 - \log 5) = -\log 5 - \log 2$$

$$x = \frac{-\log 5 - \log 2}{2\log 3 - \log 5} = \frac{\log \frac{1}{10}}{\log \frac{9}{5}} = -\frac{1}{\log \frac{9}{5}}$$

$$K = \left\{ \frac{-\log 5 - \log 2}{2\log 3 - \log 5} \right\}$$

**Př. 6:** Vyřeš rovnici  $2^{x+2} \cdot 3^{x-1} = 5^{2x}$ .

$$2^{x+2} \cdot 3^{x-1} = 5^{2x} \quad \log(2^{x+2} \cdot 3^{x-1}) = \log(5^{2x}) \quad \log(2^{x+2}) + \log(3^{x-1}) = \log(5^{2x})$$

$$(x+2)\log 2 + (x-1)\log 3 = 2x\log 5$$

$$x(\log 2 + \log 3 - 2\log 5) = \log 3 - 2\log 2$$

$$x = \frac{\log 3 - 2\log 2}{\log 2 + \log 3 - 2\log 5}$$

$$K = \left\{ \frac{\log 3 - 2\log 2}{\log 2 + \log 3 - 2\log 5} \right\}$$

**Př. 7:** Vyřeš rovnici  $2^{x^2} \cdot 3^{2x} = 5^x$ .

$$2^{x^2} \cdot 3^{2x} = 5^x \quad - \text{logaritmuje.}$$

$\log(2^{x^2} \cdot 3^{2x}) = \log(5^x)$  - každá strana je jedno číslo, které musíme logaritmovat dohromady.

$$\log(2^{x^2}) + \log(3^{2x}) = \log(5^x)$$

$$x^2 \log 2 + 2x \log 3 = x \log 5$$

$$x^2 \log 2 + 2x \log 3 - x \log 5 = 0 \quad \Rightarrow \text{kvadratická rovnice bez absolutního členu} \Rightarrow$$

vytkneme  $x$ .

$$x(x \log 2 + 2\log 3 - \log 5) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x \log 2 + 2\log 3 - \log 5 = 0 \Rightarrow x \log 2 = \log 5 - 2\log 3$$

$$x_2 = \frac{\log 5 - 2\log 3}{\log 2}$$

$$K = \left\{ 0; \frac{\log 5 - 2\log 3}{\log 2} \right\}$$