

2.9.15 Věty o logaritmech II

Předpoklady: 2914

Pro každé $a > 0$; $a \neq 1$, pro všechna kladná čísla r a pro všechna reálná čísla s platí: $\log_a r^s = s \cdot \log_a r$.

Vzorec samozřejmě platí pro libovolný druh mocniny: $\log_a \sqrt[3]{x^4} = \log_a x^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \log_a x$.

Při zápisu je potřeba rozlišovat:

- $\log_a^s r = (\log_a r)^s$ - umocňujeme hodnoty logaritmu.
- $\log_a r^s = \log_a (r^s)$ - umocňujeme číslo, ze kterého máme určit logaritmus.

Př. 1: Zapiš jako násobek $\log x$:

a) $\log x^2 + \log x^3$ b) $\log x^4 + \log \frac{1}{x^3}$ c) $\log \sqrt{x} + \log \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

a) $\log x^2 + \log x^3 = 2 \log x + 3 \log x = 5 \log x$ b) $\log x^4 + \log \frac{1}{x^3} = 4 \log x - 3 \log x = \log x$

c) $\log \sqrt{x} + \log \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{3} \log x = \frac{1}{6} \log x$

Shrňme si, co znamená logaritmus. $\log_a r$ je:

- číslo, jehož hodnotu jsme schopni spočítat (číslo, na které musíme umocnit a , aby vyšlo r)
- číslo, jehož hodnota není ve většině případů ihned zřejmá
- číslo, k jehož určení můžeme využít vzorce $\log_a rs = \log_a r + \log_a s$,

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s, \quad \log_a r^s = s \log_a r.$$

Logaritmus hodně připomíná odmocninu. Pouze vzorce pro odmocninu platí jinak:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Pedagogická poznámka: Předchozí poznámka k logaritům je sice „nematematická“, ale potřebná. Snaží se vrátit logaritmy „trochu na zem“ a přirovnat je k něčemu, s čím se studenti už smířili. Pokud by ji studenti chápali do důsledků, neměli by s bodem c) následujícího příkladu problémy.

Př. 2: Zjednoduš: a) $\log \sqrt{5} + \log \frac{1}{5}$ b) $\log_3 \sqrt{2} + \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 8$ c) $\frac{\log_3 125}{\log_3 \sqrt{5}}$.

a) $\log \sqrt{5} + \log \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \log 5 - \log 5 = -\frac{1}{2} \log 5$

b) $\log_3 \sqrt{2} + \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 8 = \log_3 2^{\frac{1}{2}} + \log_3 2^{-1} + \log_3 2^3 = \frac{1}{2} \log_3 2 - \log_3 2 + 3 \log_3 2 =$
 $= \frac{5}{2} \log_3 2$

c) $\frac{\log_3 125}{\log_3 \sqrt{5}} = \frac{\log_3 5^3}{\log_3 5^{\frac{1}{2}}} = \frac{3 \cdot \log_3 5}{\frac{1}{2} \cdot \log_3 5} = 6 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 5} = 6$

Pedagogická poznámka: Bod c) je pro studenty opravdovým oříškem. Objevují se dvě

chyby: $\frac{\log_3 125}{\log_3 \sqrt{5}} = \log_3 125 - \log_3 \sqrt{5}$ (nemístné použití vzorce pro rozdíl

logaritmu) a $\frac{\log_3 125}{\log_3 \sqrt{5}} = \frac{\log_3 5^3}{\log_3 5^{\frac{1}{2}}} = \log_3 5^{3 - \frac{1}{2}}$ (ignorování faktu, že logaritmus je

nějaké číslo, jehož hodnota není nijak přímočaře vidět). Opět je třeba zopakovat předchozí poznámku, pokud se studenti naučí přistupovat k logaritmu jako číslo, které není možné libovolně „rozmontovávat“ získáte lepší nástupní pozici pro goniometrické funkce.

Př. 3: Zapiš jedním logaritmem:

a) $\log_3 2 + 1$ b) $2 \log a + 2$ c) $2 \log_2 a - \log_2 b + \frac{1}{3} \log_2 c - 2$.

a) $\log_3 2 + 1 = \log_3 2 + \log_3 3 = \log_3 6$

b) $2 \log a + 2 = \log a^2 + \log 100 = \log 100a^2$

c) $2 \log_2 a - \log_2 b + \frac{1}{3} \log_2 c - 2 = \log_2 a^2 - \log_2 b + \log_2 \sqrt[3]{c} - \log_2 4 = \log_2 \frac{a^2 \sqrt[3]{c}}{4b}$

Pedagogická poznámka: U bodu a) je třeba být ostražitý. Pokud studenti nebudou schopni napsat $1 = \log_3 3$, je lepší jim to poradit a nemařit příliš mnoho času.

Př. 4: Vyjádři pomocí $\log_2 a$, $\log_2 b$, $\log_2 c$ a $\log_2 d$: $\log_2 \frac{4\sqrt{a^3 b}}{c^4 d}$.

$\log_2 \frac{4\sqrt{a^3 b}}{c^4 d} = \log_2 \frac{4a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{c^4 d} = \log_2 4 + \frac{3}{2} \log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 b - 4 \log_2 c - \log_2 d$

Př. 5: Vypočti:

a) $\log_{\pi} \log_2 \log_3 9$

b) $\log_6^2 3 + \log_6 3 \cdot \log_6 2 + \log_6 2 + \log_6 1$

a) $\log_{\pi} \log_2 \log_3 9 = \log_{\pi} \log_2 2 = \log_{\pi} 1 = 0$

$\log_6^2 3 + \log_6 3 \cdot \log_6 2 + \log_6 2 + \log_6 1 = \log_6 3 \cdot \log_6 3 + \log_6 3 \cdot \log_6 2 + \log_6 2 + 0 =$

b) $\log_6 3(\log_6 3 + \log_6 2) + \log_6 2 = \log_6 3(\log_6 6) + \log_6 2 = \log_6 3 \cdot 1 + \log_6 2 = \log_6 6 = 1$

Př. 6: Nakresli graf funkce $y = \log_2 x^2$

Problém: Přechíslování osy x je nad naše síly \Rightarrow zkusíme úpravu výrazu v předpisu funkce.

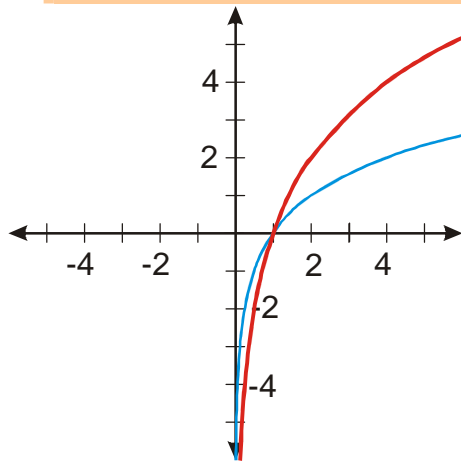
$$y = \log_2 x^2 = 2 \cdot \log_2 x$$

Platí: $y = 2 \cdot \log_2 x = 2 \cdot f(x)$

Zvolíme x .

Nakreslíme funkci $y = f(x) = \log_2 x$.

Nakreslíme funkci $y = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot \log_2 x$.



Př. 7: Nakresli graf funkce $y = \log_2 2x$:

a) bez použití vzorce pro součin uvnitř logaritmu,

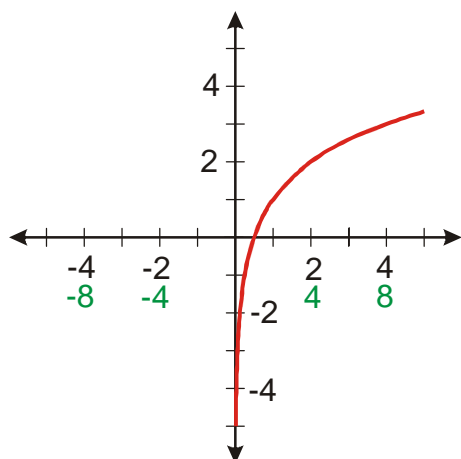
b) s použitím vzorce pro součin uvnitř logaritmu.

a) Platí: $y = \log_2 2x = f(2x)$.

Zvolíme x .

Vypočteme $2x$.

Nakreslíme funkci $y = f(2x) = \log_2 2x$.



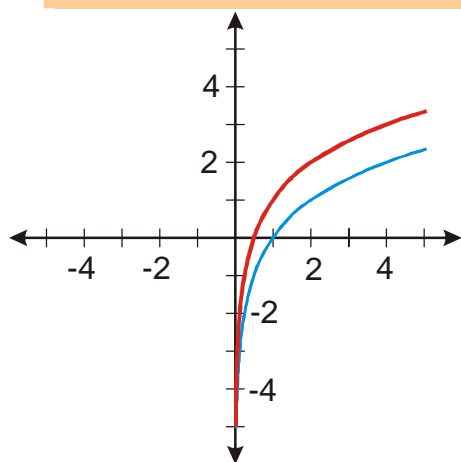
b) Platí: $y = \log_2 2x = \log_2 x + \log_2 2 = \log_2 x + 1$.

$$y = \log_2 x + 1 = f(x) + 1$$

Zvolíme x .

Nakreslíme funkci $y = f(x) = \log_2(x)$.

Nakreslíme funkci $y = f(x) + 1 = \log_2(x) + 1$.



V obou případech jsme získali stejný graf, což je samozřejmé a jenom to potvrzuje správnost vzorce pro součin uvnitř logaritmu.

Př. 8: Petáková:

strana 31/cvičení 74 a) d)

strana 31/cvičení 75 a) b) c)

Shrnutí: Logaritmy převádějí umocňování na násobení.