2.9.14 Věty o logaritmech I

Př. 1: Doplň tabulku:

x	0	1	2	3	4	5	6	10
$y=2^x$	1	2	4	8	16	32	64	1024

Př. 2: Zapiš jediným logaritmem a zjednoduš:
a) $\log_4 8+\log_4 2$ b) $\log_6 4+\log_6 9$ c) $\log_{0,1} 25+\log_{0,1} 4$

a) $\log_4 8+\log_4 2=\log_4 16=2$ b) $\log_6 4+\log_6 9=\log_6 36=2$
c) $\log_{0,1} 25+\log_{0,1} 4=\log_{0,1} 100=-2$

Př. 3: Zapiš jako součet dvou logaritmů:
a) $\log_2 6$ b) $\log_3 18$ c) $\log 7$

a) $\log_2 6=\log_2 2+\log_2 3=1+\log_2 3$ b) $\log_3 18=\log_3 9+\log_3 2=2+\log_3 2$
c) $\log 7=\log 7+\log 1$
Poslední příklad je podezřelý: $\log 7=\log 7+\log 1$. Může rovnost platit?

Př. 4: Doplň následující větu, tak aby byla rozšířením předchozího vzorce:
Pro každé $a>0$; $a\neq 1$ a pro všechna kladná čísla $r_1, r_2, \dots r_n$ platí: $\log_a\left(r_1\cdot r_2\cdots r_n\right)=\dots$

Pro každé $a>0$; $a\neq 1$ a pro všechna kladná čísla $r_1, r_2, \dots r_n$ platí:
$\log_a\left(r_1\cdot r_2\cdots r_n\right)=\log_a r_1+\log_a r_2+\dots+\log_a r_n$.

Př. 5: Zjednoduš výraz $\log_3 30-\log_3 5-\log_3 2$.

$\log_3 30-\log_3 5-\log_3 2=\log_3 3+\log_3 5+\log_3 2-\log_3 5-\log_3 2=\log_3 3=1$

Př. 6: Pomocí vzorce $\log_a \frac{r}{s}=\log_a r-\log_a s$ zjednoduš:
a) $\log_2 12-\log_2 3$ b) $\log_3 2-\log_3 6$

a) $\log_2 12-\log_2 3=\log_2 \frac{12}{3}=\log_2 4=2$

b) $\log_3 2-\log_3 6=\log_3 \frac{2}{6}=\log_3 \frac{1}{3}=-1$

Př. 7: Zjednoduš bez použití vzorce $\log_a \frac{r}{s}=\log_a r-\log_a s$ výrazy:
a) $\log_2 12-\log_2 3$ b) $\log_3 2-\log_3 6$.

a) $\log_2 12-\log_2 3=\log_2 4\cdot 3-\log_2 3=\log_2 4+\log_2 3-\log_2 3=\log_2 4=2$
b) $\log_3 2-\log_3 6=\log_3 2-\left(\log_3 3+\log_3 2\right)=-\log_3 3=-1$

Př. 8: Převeď výrazy na logaritmus jediného čísla:

a) $\log_2 30-\log_2 5+\log_2 3-\log_2 9$ b) $\log_{0,2} 8-\log_{0,2} 100+\log_{0,2} 0,5$

a) $\log_2 30-\log_2 5+\log_2 3-\log_2 9=\log_2 \frac{30\cdot 3}{9\cdot 5}=\log_2 \frac{2\cdot 15\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 5}=\log_2 2=1$

b) $\log_{0,2} 8-\log_{0,2} 100+\log_{0,2} 0,5=\log_{0,2} \frac{8\cdot 0,5}{100}=\log_{0,2} 0,04=2$

Př. 9: Zjednoduš výrazy:

a) $\log_5 90-2\log_5 3-\log_5 2$ b) $3\log_3 2-\log_3 24$.

a)

$\log_5 90-2\log_5 3-\log_5 2=\log_5 9+\log_5 10-2\log_5 3-\log_5 2=$

$\log_5 3+\log_5 3+\log_5 5+\log_5 2-2\log_5 3-\log_5 2=\log_5 5=1$

b)

$3\log_3 2-\log_3 24=3\log_3 2-(\log_3 4+\log_3 6)=$

$=3\log_3 2-(\log_3 2+\log_3 2+\log_3 2+\log_3 3)=-\log_3 3=-1$

Př. 10: Najdi vztah pro odstranění mocniny z výrazu uvnitř logaritmu: $\log_a (r^s)=$.

$\log_2 2^3=\log_2 2\cdot 2\cdot 2=\log_2 2+\log_2 2+\log_2 2=3\log_2 2$

$\log_2 2^3=3\log_2 2$ $\Rightarrow$ exponent čísla uvnitř logaritmu „spadnul“ před logaritmus $\Rightarrow$ zřejmě platí: $\log_a (r^s)=s\log_a r$.

Ověříme: $\log_a (r^s)=\log_a \left(\overbrace{r\cdot r\cdot ...\cdot r}^{s\,krát}\right)=\overbrace{\log_a r+\log_a r+...+\log_a r}^{s\,krát}=s\log_a r$.

Př. 11: Petáková:

strana 31/cvičení 72 b) c)

strana 31/cvičení 73 c) e)