2.9.12 Logaritmická funkce I

Předpoklady: 2910

Porovnáváme hodnoty exponenciální a logaritmické funkce. Jak souvisejí dvojice čísel x a y u obou funkcí?

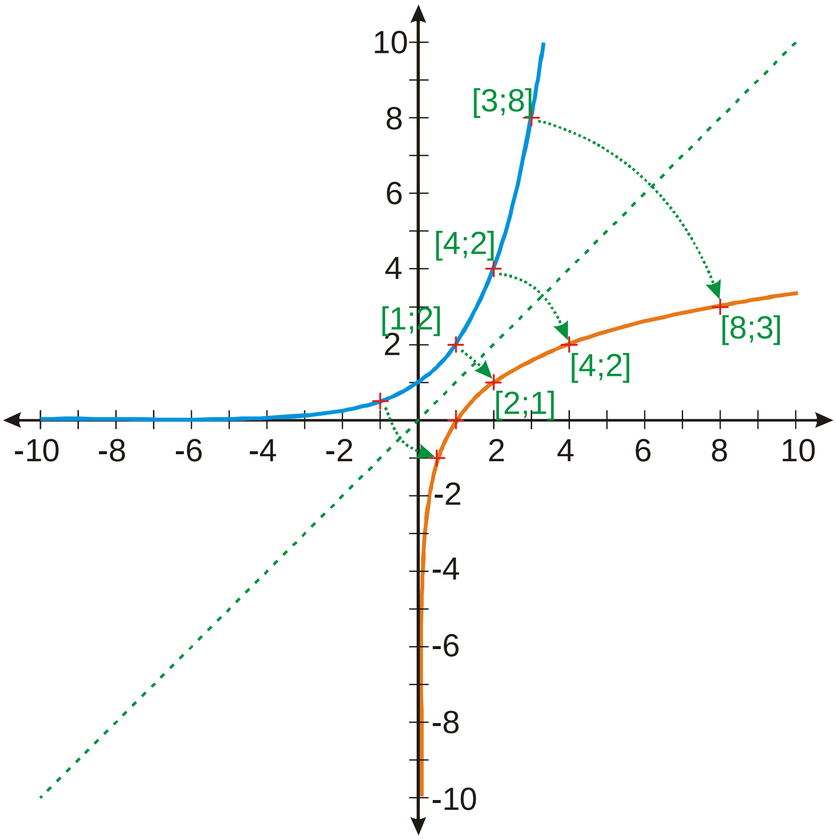
Exponenciální funkce $y = 2^x$		**Logaritmická funkce** $y = \log_2 x$	
Hodnoty	**Dvojice čísel** $x \to y$	**Hodnoty**	**Dvojice čísel** $x \to y$
$2^1 = 2$	$1 \to 2$	$\log_2 2 = 1$	$2 \to 1$
$2^0 = 1$	$0 \to 1$	$\log_2 1 = 0$	$1 \to 0$
$2^2 = 4$	$2 \to 4$	$\log_2 4 = 2$	$4 \to 2$
$2^3 = 8$	$3 \to 8$	$\log_2 8 = 3$	$8 \to 3$
$2^4 = 16$	$4 \to 16$	$\log_2 16 = 4$	$16 \to 4$
$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$-1 \to \frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{2} = -1$	$\frac{1}{2} \to -1$

U obou funkcí nacházíme stejné dvojice, ale s prohozeným pořadím x a y $\Rightarrow$ funkce $y = \log_2 x$ a $y = 2^x$ jsou navzájem inverzní.

Poznámka: Předchozí věta se většinou používá pouze v jednom směru: $y = \log_2 x$ je inverzní funkce k funkci $y = 2^x$.

Ve skutečnosti už to víme dávno. Od chvíle, kdy jsme logaritmus zavedli pomocí hodnot exponenciální funkce.

Můžeme nakreslit graf funkce $y = \log_2 x$.



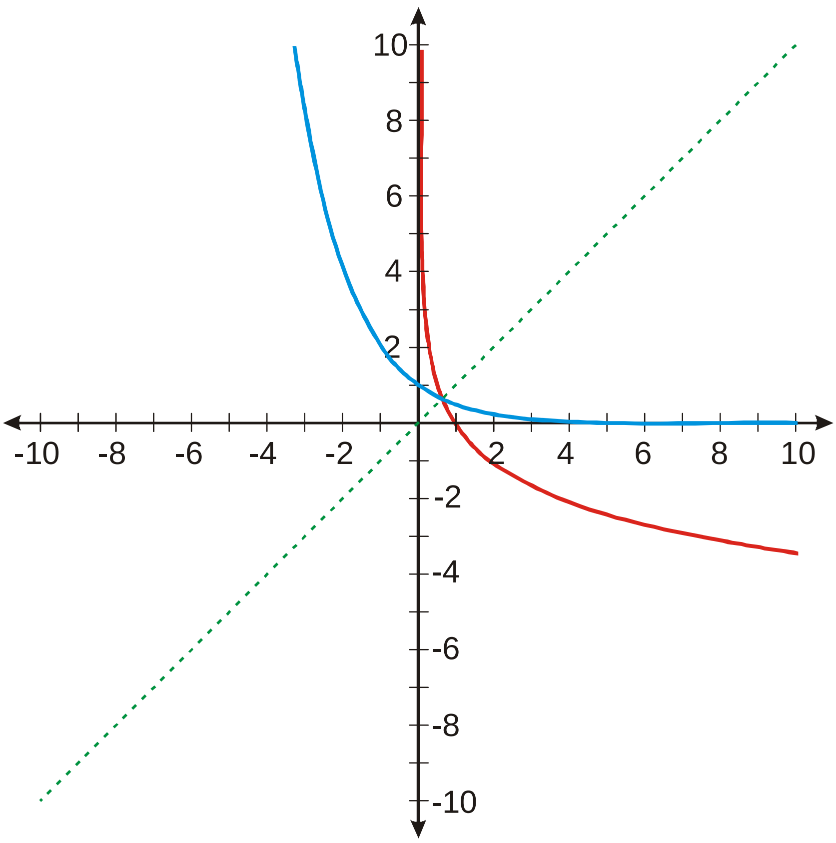
Podobně můžeme nakreslit i grafy dalších logaritmických funkcí s jinými základy. Každá má svůj vzor v odpovídající exponenciální funkci.

Př. 1: Srovnej v tabulce vlastnosti funkcí $y = 2^x$ a $y = \log_2 x$ ($D(f)$, $H(f)$, rostoucí, klesající, význačný bod).

$y = 2^x$	$y = \log_2 x$
$D(f) = R$	$D(f) = (0;\infty)$
$H(f) = (0;\infty)$	$H(f) = R$
Funkce je rostoucí.	Funkce je rostoucí.
Graf prochází bodem $[0;1]$.	Graf prochází bodem $[1;0]$.

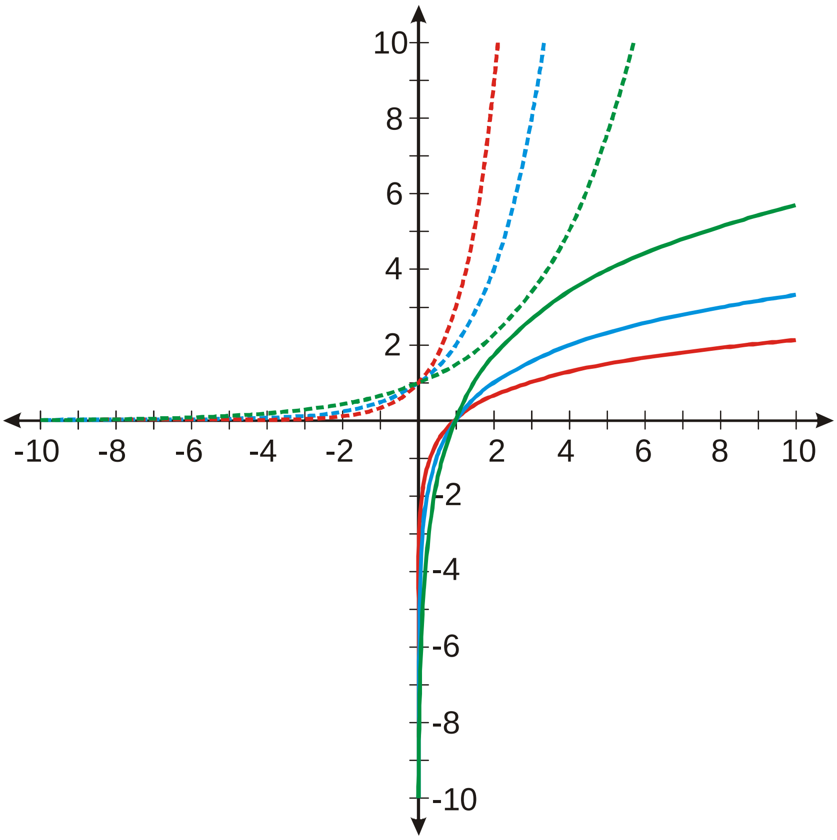
Př. 2: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ a $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ a $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ jsou navzájem inverzní funkce $\Rightarrow$ grafy musí být souměrné podle osy $y = x$.



Pedagogická poznámka: Velmi často studenti kreslí graf funkce $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ v souměrnosti podle osy $y = -x$. Získají tak obrázek, který je velmi podobný původnímu obrázku s funkcemi $y = 2^x$ a $y = \log_2 x$, což jim přijde správnější. Zdůrazňuji, že neexistuje pravidlo, které by nařizovalo, aby si všechny obrázky byly podobné, ale existují pravidla na kreslení grafů inverzních funkcí.

Př. 3: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, $y=2^x$, $y=3^x$ a k nim inverzních funkcí $y=\log_{\frac{3}{2}} x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$.



Př. 4: Pomocí předchozích příkladů rozděl logaritmické funkce do dvou skupin podle jejich vlastností. Vlastnosti přehledně zapiš do tabulky.

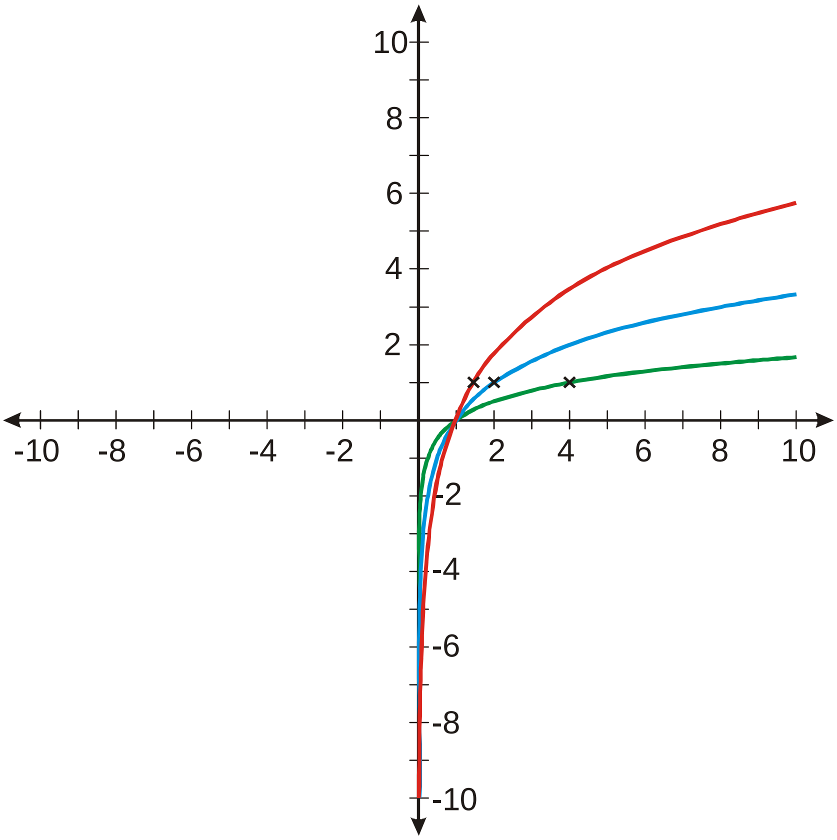
<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$y=\log_a x$</td></tr>
<tr><td align="center">$a\in(0;1)$</td><td align="center">$a\in(1;\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$D(f)=(0;\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$H(f)=R$</td></tr>
<tr><td align="center">Funkce je klesající.</td><td align="center">Funkce je rostoucí.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Graf prochází bodem $[1;0]$.</td></tr>
<tr><td align="center">Čím menší je a, tím více se graf funkce „přimyká k ose x“.</td><td align="center">Čím větší je a, tím více se graf funkce „přimyká k ose x“.</td></tr>
</table>

Pedagogická poznámka: Studenti často špatně čtou zadání předchozího příkladu a nemohou najít na obrázku z příkladu 3 dva druhy logaritmických funkcí. Jakmile je upozorním na slovo předchozích, ví, co mají dělat.

Př. 5: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y=\log_2 x$, $y=\log_4 x$, $y=\log_{1,5} x$. Tvary grafů nejdříve odhadni a potom svůj odhad potvrď tím, že určíš pro každou funkci k bodu $[1;0]$ další bod, kterým funkce prochází.

Všechny tři funkce mají základ větší než 1 $\Rightarrow$ budou rostoucí, funkce s největším základem bude nejvíce přitisknutá k ose *x*.
Jako další body volíme takové, ve kterých má logaritmus hodnotu 1. V těchto bodech je hodnota proměnné *x* rovna základu logaritmu:

- $y=\log_2 x: y=\log_2 2=1 \Rightarrow$ funkce $y=\log_2 x$ prochází bodem $[2;1]$.
- $y=\log_4 x: y=\log_4 4=1 \Rightarrow$ funkce $y=\log_4 x$ prochází bodem $[4;1]$.
- $y=\log_{1,5} x: y=\log_{1,5} 1,5=1 \Rightarrow$ funkce $y=\log_{1,5} x$ prochází bodem $[1,5;1]$.



Pedagogická poznámka: Hlavním cílem předchozího a následujícího příkladu kreslení grafů, je diskuse o volbě bodů, které umožní lépe nakreslit graf. Body musí splňovat dvě podmínky: musíme být schopni rychle určit jejich souřadnice a zároveň musí v obrázku o funkci hodně naznačit (nesmějí například splývat s bodem $[1,0]$ nebo navzájem).

Př. 6: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\log_{0,1} x$, $y=\log_{0,9} x$.

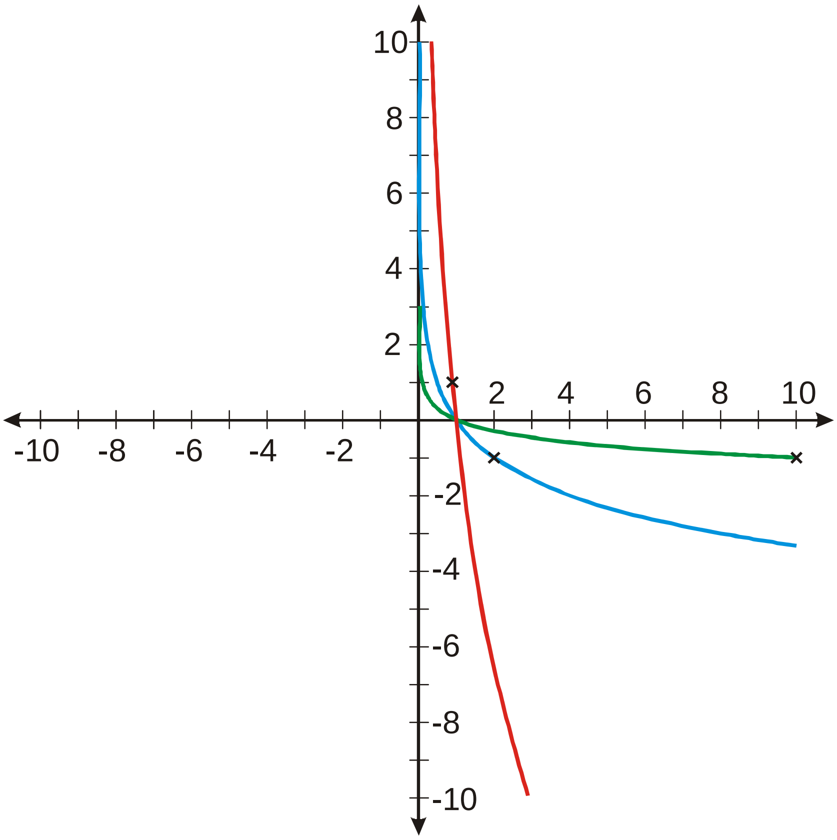
Tvary grafů nejdříve odhadni a potom svůj odhad potvrď tím, že určíš pro každou funkci k bodu $[1;0]$ další bod, kterým funkce prochází.

Všechny tři funkce mají základ menší než 1 $\Rightarrow$ budou klesající, funkce s nejmenším základem bude klesat nejrychleji. Čím menší je základ, tím více se funkce přimyká k ose *x*. Jako další body volíme takové, ve kterých má logaritmus hodnotu 1 nebo -1. (pokud bychom používali všude body s hodnotou logaritmu 1, všechny tři body by ležely blízko sebe)

$y=\log_{\frac{1}{2}} x : y=\log_{\frac{1}{2}} 2=-1 \Rightarrow$ funkce $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ prochází bodem $[2;-1]$.

$y=\log_{0,1} x : y=\log_{0,1} 10=-1 \Rightarrow$ funkce $y=\log_{0,1} x$ prochází bodem $[10;-1]$.

$y=\log_{0,9} x : y=\log_{0,9} 0,9=1 \Rightarrow$ funkce $y=\log_{0,9} x$ prochází bodem $[0,9;1]$.



Př. 7: Petáková:
strana 32/cvičení 78 f_3, f_4, f_6, f_8

Shrnutí: Logaritmická funkce je inverzní k funkci exponenciální.