

## 2.9.11 Logaritmus

### Předpoklady: 2909

**Pedagogická poznámka:** Následující příklad vyžadují tak jeden a půl vyučovací hodiny. V případě potřeby však stačí dojít k příkladu 6 a zbytek jen ukázat, což se dá za jednu hodinu stihnout (nedoporučuji).

**Pedagogická poznámka:** Je potřeba, aby studenti počítali logaritmy sami. Nedělá jim to problémy, jen na úplném začátku je třeba několika jednotlivcům zopakovat, co logaritmus znamená.

Při řešení příkladů na exponenciální závislosti i při řešení některých rovnic, jsme nebyli schopni určit výsledek. Podobnou situaci jsme už zažili při umocňování. Srovnáme obě situace na rovnicích:

Kdy to šlo:

$x^3 = 27 \Rightarrow$  Hledáme číslo, které se po umocnění na třetí bude rovnat 27.

$$\begin{aligned}x^3 &= 3^3 \\x &= 3\end{aligned}$$

$2^x = 8 \Rightarrow$  Hledáme číslo, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo 8.

$$\begin{aligned}2^x &= 2^3 \\x &= 3\end{aligned}$$

Kdy to nešlo:

$x^3 = 20 \Rightarrow$  Hledáme číslo, které se po umocnění na třetí bude rovnat 20.

Nemáme takové číslo k dispozici (žádné nám dosud známé číslo se po umocnění na třetí nerovná 20).

$$x = \sqrt[3]{20}$$

Symbol  $\sqrt[3]{20}$  znamená číslo, které se po umocnění na třetí rovná dvaceti.

Nazýváme ho třetí odmocnina z 20.

Můžeme ho určit přibližně na libovolný počet míst, například na dvě:  $\sqrt[3]{20} \doteq 2,71$ .

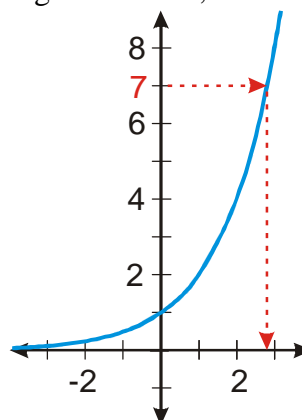
Správnost můžeme ověřit umocněním:

$$2,71^3 \doteq 19,9.$$

$2^x = 7 \Rightarrow$  Hledáme číslo, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo 7.

Nemáme takové číslo k dispozici (2 na žádné dosud známé číslo se nerovná 7).

Z grafu vidíme, že takové číslo existuje:



Funkce  $y = 2^x$  má hodnotu 7  $\Rightarrow$  musí existovat číslo, na které umocníme 2, a získáme 7. Z grafu je vidět, že bude platit:  $2 < x < 3$ .

Číslo 2,8 téměř splňuje naše požadavky:

$$2^{2,8} \doteq 6,96 \doteq 7.$$

Stejně jako u odmocniny se smíříme s tím, že nebudeme ve většině případů znát přesnou

hodnotu hledaného čísla a budeme ji určovat jen přibližně na libovolný počet míst. Číslo pojmenujeme **logaritmus při základu 2 ze 7** ( $\log_2 7$ ) (**základ 2**, protože umocňujeme 2, **ze 7** protože po umocnění má vyjít 7). Nejpřesnější odpověď na otázku: „Na jaké číslo musíme dát 2, aby vyšla 7?“, je  $\log_2 7$ . Platí:  $2^x = 7$ , právě když  $x = \log_2 7$ .

Logaritmus při základu  $a$  z  $x$  je číslo  $y$  (píšeme  $y = \log_a x$ ), na které musíme umocnit základ  $a$ , abychom získali číslo  $x$  (píšeme  $x = a^y$ ). Tedy  $y = \log_a x$ , právě když  $x = a^y$ .

Předchozí definice pro nás teď bude velmi důležitá. Vždy když budeme potřebovat zjistit význam libovolného čísla vystupujícího okolo logaritmu, odkážeme se na ni.

**Pedagogická poznámka:** Definice samozřejmě není kompletní a korektní. Jejím dokončením se studenti zabývají později, ve chvíli, kdy již určí několik logaritmu a začnou se trochu orientovat ve významu čísel  $x$ ,  $y$ ,  $a$ . Pokud někdo na nekompletnost upozorní, řešíme ji ihned.

Jaká je hodnota  $\log_2 8$  ?

Hledáme číslo, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo 8. Hledané číslo je 3, protože platí:  $2^3 = 8 \Rightarrow \log_2 8 = 3$ .

**Poznámka:** Všimni si, že stejně jako se při určování hodnot odmocnin odkazujeme na umocňování, při určování hodnot logaritmu se odkazujeme na hodnoty exponenciální funkce.

**Př. 1:** Urči  $\log_3 9$ .

Hledáme číslo, na které musíme umocnit 3, aby vyšlo 9. Hledané číslo je 2, protože platí:  $3^2 = 9 \Rightarrow \log_3 9 = 2$ .

**Poznámka:** Příklad můžeme řešit také jako rovnicí. Hledáme číslo, na které musíme umocnit 3, aby vyšlo 9. Když si ho označíme  $x$ , musí platit:  $3^x = 9$ .

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

$$\log_3 9 = 2$$

**Př. 2:** Urči hodnoty logaritmu:

a)  $\log_4 16$

b)  $\log_{10} 10000$

c)  $\log_2 32$

d)  $\log_{\frac{1}{2}} 8$

e)  $\log_{\sqrt{3}} 9$

a)

Hledáme číslo, na které musíme umocnit 4, aby vyšlo 16. Hledané číslo je 2, protože platí:  
 $4^2 = 16 \Rightarrow \log_3 9 = 2$ .

b)

Hledáme číslo, na které musíme umocnit 10, aby vyšlo 10000. Hledané číslo je 4, protože platí:  $10^4 = 10000 \Rightarrow \log_{10} 10000 = 4$ .

c)

Hledáme číslo, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo 32. Hledané číslo je 5, protože platí:  
 $2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5$ .

d)

Hledáme číslo, na které musíme umocnit  $\frac{1}{2}$ , aby vyšlo  $\frac{1}{8}$ . Hledané číslo je 3, protože platí:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3.$$

e)

Hledáme číslo, na které musíme umocnit  $\sqrt{3}$ , aby vyšlo 9. Hledané číslo je 4, protože platí:

$$(\sqrt{3})^4 = \left[(\sqrt{3})^2\right]^2 = 3^2 = 9 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} 9 = 4.$$

**Př. 3:** Urči hodnoty logaritmů:

a)  $\log_2 \frac{1}{2}$

b)  $\log_{10} 0,0001$

c)  $\log_5 1$

d)  $\log_{\frac{1}{2}} 16$

e)  $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8}$

a)

Hledáme číslo  $x$ , na které musíme umocnit 2, aby vyšlo  $\frac{1}{2}$ .

Pomůžeme si rovnicí:  $2^x = \frac{1}{2}$ .       $2^x = 2^{-1}$        $x = -1$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

b)

Hledáme číslo  $x$ , na které musíme umocnit 10, aby vyšlo 0,0001.

Pomůžeme si rovnicí:  $10^x = 0,0001$ .       $10^x = 10^{-4}$        $x = -4$

$$\Rightarrow \log_{10} 0,0001 = -4$$

c)

Hledáme číslo  $x$ , na které musím umocnit 5, aby vyšlo 1.

Pomůžeme si rovnicí:  $5^x = 1$ .       $5^x = 5^0$        $x = 0$

$$\Rightarrow \log_5 1 = 0 \text{ (logaritmus z 1 se rovná nule bez ohledu na základ)}$$

d)

Hledáme číslo  $x$ , na které musíme umocnit  $\frac{1}{2}$ , aby vyšlo 16.

Pomůžeme si rovnicí:  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$ .       $(2^{-1})^x = 2^4$        $2^{-x} = 2^4$        $x = -4$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$$

e)

Hledáme číslo  $x$ , na které musíme umocnit  $\sqrt{2}$ , aby vyšlo  $\frac{1}{8}$ .

$$\text{Pomůžeme si rovnicí: } (\sqrt{2})^x = \frac{1}{8}. \quad \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^{-3} \quad \frac{x}{2} = -3 \quad x = -6$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8} = -6$$

**Pedagogická poznámka:** Většina studentů dokáže předchozí logaritmy určovat z paměti, což je samozřejmě lepší. Použití rovnice by mělo být zbraní poslední záchrany, přesto ho doporučuji poměrně brzo po zadání příkladu 3 ukázat na tabuli, aby studenti s horší schopností počítat z paměti zbytečně neztráceli čas.

**Př. 4:** Urči hodnoty logaritmů:

a)  $\log_3 \sqrt{3}$

b)  $\log_4 32$

c)  $\log_{27} 3^7$

d)  $\log_{\sqrt{8}} 16$

a)

Hledáme číslo  $x$ , na které musíme umocnit 3, aby vyšlo  $\sqrt{3}$ .

$$\text{Pomůžeme si rovnicí: } 3^x = \sqrt{3}. \quad 3^x = 3^{\frac{1}{2}} \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

b)

Hledáme číslo  $x$ , na které musíme umocnit 4, aby vyšlo 32.

$$\text{Pomůžeme si rovnicí: } 4^x = 32. \quad (2^2)^x = 2^5 \quad 2^{2x} = 2^5 \quad x = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \log_4 32 = \frac{5}{2}$$

c)

Hledáme číslo  $x$ , na které musíme umocnit 27, aby vyšlo  $3^7$ .

$$\text{Pomůžeme si rovnicí: } 27^x = 3^7. \quad (3^3)^x = 3^7 \quad 3^{3x} = 3^7 \quad x = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \log_{27} 3^7 = \frac{7}{3}$$

d)

Hledáme číslo  $x$ , na které musíme umocnit  $\sqrt{8}$ , aby vyšlo 16.

$$\text{Pomůžeme si rovnicí: } (\sqrt{8})^x = 16. \quad \left([2^3]^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^4 \quad 2^{\frac{3x}{2}} = 2^4 \quad 3x = 8$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{8}} 16 = \frac{8}{3}$$

Logaritmus při základu  $a$  z  $x$  je číslo  $y$  (píšeme  $y = \log_a x$ ), na které musíme umocnit základ  $a$ , abychom získali číslo  $x$  (píšeme  $x = a^y$ ). Tedy  $y = \log_a x$ , právě když  $x = a^y$ .

**Př. 5:** Definice logaritmu ze začátku hodiny není úplná a korektní. Doplň ji tak, aby byla správná.

V definici zřejmě chybí předpoklady o hodnotách  $a$  a  $x$ .

$a$  (číslo, které umocňujeme)  $\Rightarrow$  stejné požadavky jako na základ exponenciální funkce  $\Rightarrow a \in (0; \infty) - \{1\}$ .

$x$  (výsledek umocňování)  $\Rightarrow$  umocňujeme kladná čísla, různá od jedné  $\Rightarrow$  výsledek musí být vždy kladný  $\Rightarrow x \in (0; \infty)$ .

$y$  (mocnitel)  $\Rightarrow$  může být libovolný  $\Rightarrow y \in \mathbb{R}$ .

Logaritmus při základu  $a$  z  $x$  je číslo  $y$  (píšeme  $y = \log_a x$ ), na které musíme umocnit základ  $a$ , abychom získali číslo  $x$  (píšeme  $x = a^y$ ). Tedy  $y = \log_a x$ , právě když  $x = a^y$ . Tedy  $y = \log_a x$  právě když  $x = a^y$ .

**Pedagogická poznámka:** Myslím, že použitá metoda pozdějšího doplnění předpokladů je výhodnější. Studenti si nejdříve zažijí, jak se logaritmy počítají a teprve poté, když znají význam jednotlivých čísel, sestavují předpoklady. Takto se nad předpoklady zamyslí, alespoň v okamžiku, kdy je formulují. V klasickém případě je většinou zcela ignorují.

**Př. 6:** Urči z paměti hodnoty logaritmu:

a)  $\log_2 2^{\sqrt{3}}$       b)  $\log_{\sqrt{7}} 7^\pi$       c)  $\log_4 2^{\sqrt{12}}$

a)  $\log_2 2^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$       (2 musíme umocnit na  $\sqrt{3}$ , aby vyšlo  $2^{\sqrt{3}}$ )

b)  $\log_{\sqrt{7}} 7^\pi = 2\pi$       ( $\sqrt{7}$  musíme umocnit na druhou a na  $\pi$ , aby vyšlo  $7^\pi$ )

c)  $\log_4 2^{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$       (4 musíme umocnit na polovinu a na  $\sqrt{12}$ , aby vyšlo  $2^{\sqrt{12}}$ )

**Pedagogická poznámka:** Minimálně první bod by měli studenti opravdu vyřešit (a chápat) z hlavy. Pokud ne, je potřeba ujasnění situace.

**Př. 7:** Urči hodnotu výrazu  $2^{\log_2 7}$ .

Platí:  $2^{\log_2 7} = 7$ .

$\log_2 7$  je číslo, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo 7. A právě na toto číslo jsme dvojku umocnili.

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad by měl být opět všem zcela jasný. Překvapivě s ním mají problémy lepší studenti. Při vysvětlování je možné použít zadání, ze kterého je možné provést výpočet přímo:

Urči hodnotu výrazu  $2^{\log_2 8}$

$$2^{\log_2 8} = 2^3 = 8 \quad (\text{platí } \log_2 8 = 3).$$

V každém případě je potřeba, aby každý chápal rovnost  $2^{\log_2 8} = 8$  přímo bez určování hodnoty logaritmu, které jsme použili v této poznámce.

**Př. 8:** Urči číslo  $x$ , pokud platí:

$$\text{a) } \log_4 x = 2 \quad \text{b) } \log_4 x = \frac{1}{2} \quad \text{c) } \log_{\sqrt{2}} x = 4 \quad \text{d) } \log_{\sqrt{3}} x = \frac{1}{4}$$

a)

Opakujeme význam čísel  $\log_4 x = 2 \Rightarrow 4$  je základ mocniny (co umocňujeme),  $x$  je číslo, které vyjde po umocnění, hodnota logaritmu (2) je číslo na které umocňujeme. Platí tedy:

$$x = 4^2 = 16.$$

b) Platí:  $x = 4^{\frac{1}{2}} = 2.$

c) Platí:  $x = (\sqrt{2})^4 = 4.$

d) Platí:  $x = (\sqrt{3})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}.$

**Poznámka:** Je vidět, že příklady tohoto typu je možné řešit zcela automaticky. Základ logaritmu umocníme na jeho hodnotu a získáme číslo, ze kterého jsme logaritmus počítali.

**Př. 9:** Urči číslo  $a$ , pokud platí:

$$\text{a) } \log_a 16 = 4 \quad \text{b) } \log_a \frac{1}{8} = -2 \quad \text{c) } \log_a \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{d) } \log_a 27 = 6$$

a)  $\log_a 16 = 4$

Opakujeme význam čísel  $\log_a 16 = 4 \Rightarrow a$  je základ mocniny (co umocňujeme), 16 je číslo, které vyjde po umocnění, hodnota logaritmu (4) je číslo, na které umocňujeme. Platí tedy:

$$16 = a^4. \Rightarrow \text{Ptáme se: „Jaké číslo musíme umocnit na 4, aby vyšlo 16?"}$$

$$2^4 = a^4 \Rightarrow a = 2$$

b)  $\log_a \frac{1}{8} = -2$

Jaké číslo musíme umocnit na -2, aby vyšlo  $\frac{1}{8}$ ?

$$a^{-2} = \frac{1}{8} \quad \frac{1}{a^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

c)  $\log_a \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Jaké číslo musíme umocnit na  $\frac{1}{2}$ , aby vyšlo  $\frac{1}{2}$ ?

$$a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad \sqrt{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

d)  $\log_a 27 = 6$

Jaké číslo musíme umocnit na 6, aby vyšlo 27?

$$a^6 = 27 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$$

**Př. 10:** Urči hodnotu výrazu:

a)  $3^{\log_9 10}$                       b)  $0,5^{\log_2 7}$

**Problém:** Čísla, na která umocňujeme jsou jiná než číslo v základu logaritmu. Upravíme výraz, zkusíme přepsat základ mocniny:

a)  $3^{\log_9 10} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 10} = \left(9^{\log_9 10}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

b)  $0,5^{\log_2 7} = \left(2^{-1}\right)^{\log_2 7} = \left(2^{\log_2 7}\right)^{-1} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$

**Př. 11:** Zjednoduš výrazy a uveď podmínky:

a)  $2^{\log_2 x^2}$                       b)  $\log_x x^2$

a)  $2^{\log_2 x^2} = x^2$                        $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

b)  $\log_x x^2 = 2$                        $x \in (0; \infty) - \{1\}$                       (základ logaritmu nesmí být 1)

**Př. 12:** Petáková:

strana 31/cvičení 69    d) e) g)

strana 31/cvičení 70    c) d) g) h)

strana 31/cvičení 71    c) d) g)

**Shrnutí:**  $\log_2 8$  je číslo, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo 8. Proto platí  $\log_2 8 = 3$ .