2.9.10 Exponenciální rovnice (shrnutí)

Předpoklady: 2907, 2909

Pedagogická poznámka: Tato hodina nepřináší žádné nové vědomosti. Studenti by si v ní měli cvičit schopnost vybrat ze všech metod, které jsme si ukázali při řešení exponenciálních rovnic (a nerovnic), tu správnou. Pomáhat by jim měl přehled metod, který si měli průběžně sestavovali.
Veškeré diskuse v lavicích pak směřují právě k vybrání správné metody: jaké rysy má příklad, co s ním můžeme (nemůžeme udělat) atd.
Rovnice v této hodině nejsou záměrně příliš početně náročné, aby studenti mohli projít co největší počet příkladu a zkoušet „vybírání metody“.
Posledních sedm minut hodiny věnujeme příkladu 9, jde o návod k logaritmům, které začneme probírat v další hodině.

Pedagogická poznámka: Opět se snažím ocenit studenty, kteří stihnou hodně spočítat. Většinou sedm rovnic oceňuji jedničkou, pět plusem.

Př. 1: Vyřeš rovnici $\left(\frac{8}{27}\right)^x = \frac{9}{4}$.

Rovnice obsahuje pouze rovnost dvou mocnin $\Rightarrow$ převedeme na stejný základ.

$$\left(\left[\frac{2}{3}\right]^3\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

$$3x = -2$$

$$x = -\frac{2}{3} \qquad K = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

Př. 2: Vyřeš rovnici $4 \cdot 2^x \cdot \sqrt{2} = 4^x \cdot 2$.

Rovnice obsahuje pouze násobení $\Rightarrow$ převedeme ji na tvar $a^{výraz1} = a^{výraz2}$.

$$2^2 \cdot 2^x \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^2\right)^x \cdot 2$$

$$2^{x+2+\frac{1}{2}} = 2^{2x+1}$$ (můžeme přejít od mocnin k normální rovnici)

$$x + 2 + \frac{1}{2} = 2x + 1$$

$$x = \frac{3}{2} \qquad K = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Př. 3: Vyřeš rovnici: $3^{x+1}+2\cdot 3^x=5^{x+1}-2\cdot 5^x$.

Máme zdánlivě dva výrazy na substituci $\Rightarrow$ musíme je dát dohromady do zlomku $\Rightarrow$ vydělíme rovnici 5^x nebo 3^x.

$3^{x+1}+2\cdot 3^x=5^{x+1}-2\cdot 5^x \quad /:5^x$

$\frac{3^{x+1}}{5^x}+2\cdot\frac{3^x}{5^x}=\frac{5^{x+1}}{5^x}-2\cdot\frac{5^x}{5^x}$

$3\left(\frac{3}{5}\right)^x+2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x=5-2$

Substituce: $a=\left(\frac{3}{5}\right)^x$

$3a+2a=3$

$5a=3$

$a=\frac{3}{5}$

Návrat k původní proměnné:

$a=\frac{3}{5}=\left(\frac{3}{5}\right)^x$

$x=1$ $\qquad K=\{1\}$

Př. 4: Vyřeš rovnici $3^x-3^{x-1}-2\cdot 3^{x-2}-3\cdot 3^{x-3}=9$.

Mezi mocninami není násobení $\Rightarrow$ musíme použít substituci, nejlépe $3^{x-3}=a$.

Substituce: $a=3^{x-3}$

$3^{x-2}=3^{x-3+1}=3^{x-3}\cdot 3=3a$, $3^{x-1}=3^{x-3+2}=3^{x-3}\cdot 3^2=9a$, $3^x=3^{x-3+3}=3^{x-3}\cdot 3^3=27a$

$3^x-3^{x-1}-2\cdot 3^{x-2}-3\cdot 3^{x-3}=9$

$27a-9a-2\cdot 3a-3a=9$

$9a=9$

$a=1$

Návrat k původní proměnné:

$a=3^{x-3}=1$

$3^{x-3}=3^0$

$x-3=0$

$x=3$ $\qquad K=\{3\}$

Př. 5: Vyřeš rovnici $\frac{5^{x^2}\cdot 2^{x^2}}{5^{-8}}=\frac{2^{-8}}{10^{-11x+2}}$.

V exponentu je x^2, kterého se pomocí úprav nezbavíme $\Rightarrow$ musíme rovnici převést na tvar $a^{výraz1}=a^{výraz2}$. Jako základ zřejmě vyjde číslo 10.

$\frac{5^{x^2}\cdot 2^{x^2}}{5^{-8}}=\frac{2^{-8}}{10^{-11x+2}} \quad /\cdot 5^{-8}$

$$10^{x^2} = \frac{5^8 \cdot 2^{-8}}{10^{-11x+2}} = \frac{10^{-8}}{10^{-11x+2}}$$

$10^{x^2} = 10^{-8-(-11x+2)} = 10^{11x-10}$ (můžeme přejít od mocnin k normální rovnici)

$x^2 = 11x - 10$

$x^2 - 11x + 10 = (x-10)(x-1) = 0$

$x_1 = 10$, $x_2 = 1$ $K = \{1;10\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.

Zdánlivě tři výrazy na substituci $a = 9^x$, $b = 6^x$ a $c = 4^x$, ale platí $6^x = 2^x \cdot 3^x$ $\Rightarrow$ vše převedeme na 2^x a 3^x.

$2 \cdot 2^x \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x \cdot 3^x = 5 \cdot 2^x \cdot 3^x$

Každý člen rovnice obsahuje dvě mocniny $\Rightarrow$ vydělíme rovnici výrazem $3^x \cdot 3^x$, abychom dostali mocniny „k sobě“.

$2 \cdot 2^x \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x \cdot 3^x = 5 \cdot 2^x \cdot 3^x \quad : /3^x \cdot 3^x$

$$2 \cdot \frac{2^x \cdot 2^x}{3^x \cdot 3^x} + 3 \cdot \frac{3^x \cdot 3^x}{3^x \cdot 3^x} = 5 \cdot \frac{2^x \cdot 3^x}{3^x \cdot 3^x}$$

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Substituce: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = a$

$2a \cdot a + 3 = 5a$

$2a^2 - 5a + 3 = 0$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$a_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $a_2 = \frac{5-1}{4} = 1$

Návrat k původní proměnné:

$a_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} = \frac{3}{2}$ $a_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$

$x_1 = -1$ $x_2 = 0$

$K = \{-1;0\}$

Př. 7: Vyřeš rovnici $\sqrt[x]{2^3} \cdot 8 = \sqrt{\sqrt[x]{2} \cdot 4}$.

Rovnice obsahuje pouze násobení $\Rightarrow$ převedeme ji na tvar $a^{výraz1} = a^{výraz2}$.

$$\left(2^3\right)^{\frac{1}{x}} \cdot 2^3 = \left(2^{\frac{1}{x}} \cdot 2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{\frac{3}{x}} \cdot 2^3 = 2^{\frac{1}{2x}} \cdot 2$$
$$2^{\frac{3}{x}+3} = 2^{\frac{1}{2x}+1}$$
$$\frac{3}{x}+3=\frac{1}{2x}+1$$
$$\frac{3+3x}{x}=\frac{1+2x}{2x} \quad / \cdot 2x$$
$$2(3+3x)=1+2x$$
$$6+6x=1+2x$$
$$4x=-5$$
$$x=-\frac{5}{4} \qquad K=\left\{-\frac{5}{4}\right\}$$

Př. 8: Vyřeš rovnici $2^{2x} \cdot 5^{x+1} = 4^{x+1} + 4^x$.

Rovnice vypadá neřešitelně, tři různé základy, dělení nepovede k cíli, zkusíme upravit pravou stranu:
$$2^{2x} \cdot 5^{x+1} = 4^x \cdot 4 + 4^x = 4^x(4+1)$$
$$2^{2x} \cdot 5^{x+1} = 5 \cdot 4^x$$
$$2^{2x} \cdot 5^{x+1} = 5 \cdot 2^{2x} \quad / : 2^{2x}$$
$$5^{x+1} = 5$$
$$x+1=1$$
$$x=0 \qquad K=\{0\}$$

Př. 9: Vyřeš rovnici $3^x + 2 \cdot 3^{1-x} = 5$.

Problém: Potřebovali bychom substituci $3^x = y$ $\Rightarrow$ musíme upravit výraz $2 \cdot 3^{1-x}$, tak abychom získali 3^x.
$$3^x + 2 \cdot 3^{1-x} = 5$$
$$3^x + 2 \cdot 3 \cdot 3^{-x} = 5$$
$$3^x + 6 \cdot \frac{1}{3^x} = 5$$
$$3^x + \frac{6}{3^x} = 5$$

Substituce: $y = 3^x$
$$y+\frac{6}{y}=5 \quad / \cdot y$$ (můžeme násobit, $y = 3^x \Rightarrow y > 0$)
$$y^2+6=5y$$
$$y^2-5y+6=0$$
$$(y-3)(y-2)=0$$
$$y_1 = 3 \qquad y_2 = 2$$

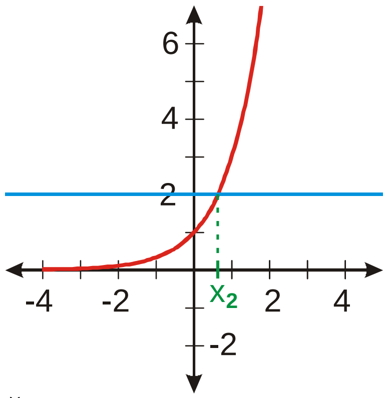
Návrat k původní proměnné:
$$y_1 = 3^{x_1} = 3 \qquad y_2 = 3^{x_2} = 2$$

$3^{x_1} = 3^1$
$x_1 = 1$

$K = \{x_2; 1\}$

$3^{x_2} = 2$

Neumíme napsat 2 jako mocninu trojky (tři na něco). To neznamená, že rovnice $3^{x_2} = 2$ nemá řešení, nakreslíme graf funkce $y = 3^x$ a funkce $y = 2$.



Číslo, které by bylo řešením, existuje, platí pro něj $0 < x_2 < 1$. Je to číslo, na které musíme umocnit trojku, aby vyšla dvojka, ale nevíme, co to je za číslo, jak ho spočítat.
Podobná situace jako u posledního slovního příkladu.
Je vidět, že to budeme muset jednou vyřešit.

Shrnutí: