2.9.8 Exponenciální nerovnice I

Předpoklady: 2906

Př. 1: Vyřeš nerovnici $2^t \geq \sqrt{2}$. Ověř pomocí zkoušky pro dvě čísla z množiny řešení předchozí nerovnice jeho správnost.

$2^t \geq 2^{\frac{1}{2}}$ Podobně jako u rovnic teď vystoupíme z mocnin.

$t \geq \frac{1}{2}$ $K = \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right)$

Teď ověření:

$t = 1$

$2^t \geq \sqrt{2}$

$2^1 \geq \sqrt{2}$ - platí

$t = 5123$

$2^t \geq \sqrt{2}$

$2^{5132} \geq \sqrt{2}$ - platí

Zdá se, že vše je v pořádku.

Toto nebyla zkouška. I když ověření pro obě čísla vyjde neznamená to bez další diskuse, že řešení je v pořádku.

Pedagogická poznámka: Pro zdar hodiny je důležité, aby alespoň část studentů řešila příklad tak, jak je naznačeno dále (bez úprav levé strany). Za normální situace většina studentů postupuje způsobem naznačeným v učebnici, menšina provede úpravu levé straně na základ 2. Je to ideální situace, protože obě skupiny získají různé výsledky a třída se může dát do zkoumání tohoto rozporu.

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\left(\frac{1}{2}\right)^t \leq 2$. Ověř pomocí zkoušky pro dvě čísla z množiny řešení předchozí nerovnice jeho správnost.

$\left(\frac{1}{2}\right)^t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ Podobně jako u rovnice teď vystoupíme z mocnin.

$t \leq -1$ $K = (-\infty; -1\rangle$

Teď ověření:

$t = -2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \leq 2$

$4 \leq 2$ **To ale neplatí!!!!!**

$t = -4$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \leq 2$

$16 \leq 2$ **To ale neplatí!!!!!**

Předchozí ověření jasně ukázalo, že náš výsledek $K = (-\infty; -1\rangle$ je špatný. Zkusíme, jak dopadnou čísla, která jsme jako řešení neurčili (tedy čísla z intervalu $\langle -1; \infty)$).

$t = 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^1 \leq 2$

$t = 2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq 2$

$\frac{1}{2} \leq 2$ **To platí!!!! (ale nemělo by)**

$\frac{1}{4} \leq 2$ **To platí!!!! (ale nemělo by)**

Dostali jsme se do zmatené situace. U nerovnice $2^t \geq \sqrt{2}$ je naše řešení zřejmě správné, u nerovnice $0,6^t \leq \frac{10}{6}$ j situace zřejmě přesně obrácená než jsme spočítali.

Kde je chyba?

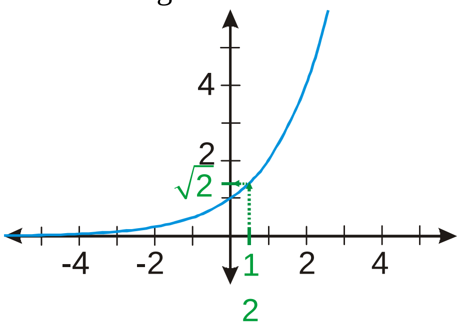
Nezbývá než se vrátit k exponenciálním funkcím a vyřešit oba příklady pomocí grafů.

$2^t \geq \sqrt{2}$

$2^t \geq 2^{\frac{1}{2}}$

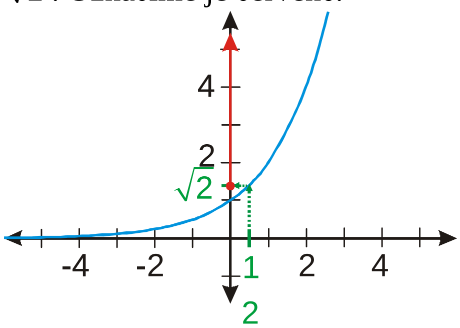
Porovnáváme hodnoty funkce $y = 2^x$, pro číslo $\frac{1}{2}$ a neznámá čísla *t*. Funkce $y = 2^x$ má mít pro *t* hodnotu větší než $\sqrt{2}$.

Nakreslíme graf:



Z čísla $\frac{1}{2}$ vyrobila funkce $y = 2^x$ číslo $\sqrt{2}$.

Hledáme hodnoty (jsou na ose *y*) větší než $\sqrt{2}$. Označíme je červeně.



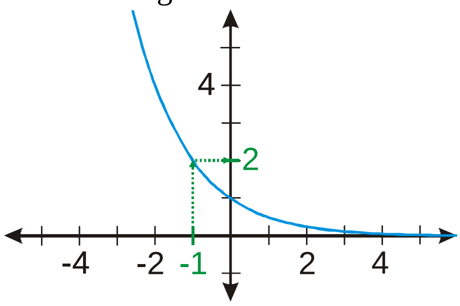
Zpětně hledáme z jakých čísel tyto hodnoty vznikly.

$\left(\frac{1}{2}\right)^t \leq 2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

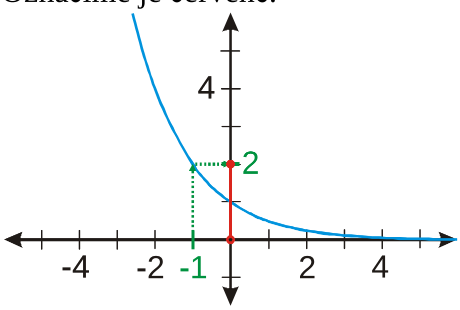
Porovnáváme hodnoty funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, pro číslo -1 a pro neznámá čísla *t*. Funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ má mít pro *t* hodnotu menší než 2.

Nakreslíme graf:

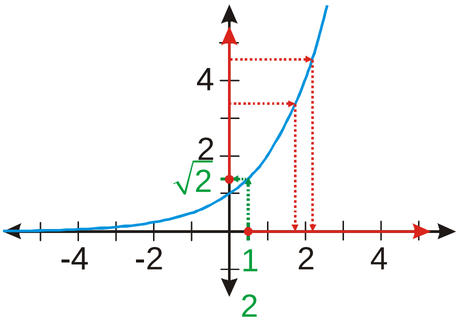


Z čísla -1 vyrobila funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ číslo 2.

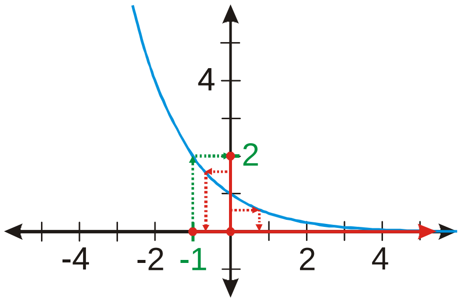
Hledáme hodnoty (jsou na ose *y*) menší než 2. Označíme je červeně.



Zpětně hledáme z jakých čísel tyto hodnoty vznikly.



Vznikly z hodnot $t \in \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right)$.



Vznikly z hodnot $t \in \left\langle -1; \infty \right)$.

Funkce $y = 2^x$ je rostoucí, z větších hodnot x dělá větší hodnoty y (zachovává nerovnost x pro hodnoty y) $\Rightarrow$ při vystupování z mocnin nerovnost zachováme.

Funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ je klesající, z větších hodnot x dělá menší hodnoty y (obrací nerovnost x pro hodnoty y) $\Rightarrow$ při vystupování z mocnin nerovnost obrátíme.

Pedagogická poznámka: Ideální by bylo, kdyby studenti nakreslili grafy a udělali rozbor sami. Čas by na to být mohl, stačí, když studenti stihnou do konce hodiny příklad 3.

Na předchozích pravidlech není nic překvapivého. Už v úvodu k nerovnicím jsme si ukázali, že funkce, které odpovídají úpravám nerovnic, u kterých nemusíme obracet znaménko, musí být rostoucí (aby zachovávali nerovnost). Úpravy, které vyžadují obrácení znaménka, naopak reprezentují funkce klesající (jako například funkce $y = -x$, která reprezentuje vynásobením číslem (-1)).

Při řešení exponenciálních nerovnic ve chvíli, kdy opouštíme exponenciální vyjádření:

- **Pokud je základ větší než 1, zachováváme znaménko nerovnosti.**
- **Pokud je základ menší než 1, obracíme znaménko nerovnosti.**

Př. 3: Vyřeš exponenciální nerovnice:

a) $3^{x+5} < 1$ b) $0{,}1^{2x} \leq 1$ c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} \geq 0$ d) $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x+3} \leq 16$

a) $3^{x+5} < 1$

$3^{x+5} < 3^0$

Základ mocniny je větší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin.

$x + 5 < 0$

$x < -5$ $K = (-\infty, -5)$

b) $0{,}1^{2x} \leq 1$

$0{,}1^{2x} \leq 0{,}1^0$

Základ mocniny je menší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost u exponentů mocnin obrací.

$2x \geq 0$

$x \geq 0$ $K = \left\langle 0, \infty \right)$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} \geq 0$

$K = R$ Všechny mocniny kladného čísla jsou kladná čísla.

d) $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x+3} \leq 16$

$\left(2^{-3}\right)^{2x+3} \leq 2^4$

Základ mocniny je větší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin.

$2^{-6x-9} \leq 2^4$

$-6x-9 \leq 4$

$-6x \leq 13$

$x \geq -\frac{13}{6}$ $K = \left\langle -\frac{13}{6}; \infty \right)$

Pedagogická poznámka: Největší problémy jsou s řešením bodu c), kde studenti nedokážou napsat 0 jako mocninu jedné pětiny. Opět jim nejdřív připomínám, aby si uvědomili význam mocniny.

Př. 4: Vyřeš nerovnice:

a) $2 \cdot 2^x \cdot 4^x > \sqrt{8}$ b) $0{,}1^{x+2} > 0{,}01^{x+3}$

a) $2 \cdot 2^x \cdot 4^x > \sqrt{8}$ Převedeme nerovnici na tvar $2^{výraz1} > 2^{výraz2}$.

$2 \cdot 2^x \cdot \left(2^2\right)^x > \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}$

$2 \cdot 2^x \cdot 2^{2x} > 2^{\frac{3}{2}}$

$2^{1+x+2x} > 2^{\frac{3}{2}}$

Základ mocniny je větší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin.

$3x+1 > \frac{3}{2}$

$6x+2 > 3$

$x > \frac{1}{6}$ $K = \left(\frac{1}{6}; \infty\right)$

b) $0{,}1^{x+2} > 0{,}01^{x+3}$ Převedeme nerovnici na tvar $0{,}1^{výraz1} > 0{,}1^{výraz2}$.

$0{,}1^{x+2} > \left(0{,}1^2\right)^{x+3}$

$0{,}1^{x+2} > 0{,}1^{2x+6}$

Základ mocniny je menší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost mezi exponenty mocnin se obrací.

$x+2 < 2x+6$

$x > -4$ $K = (-4; \infty)$

Př. 5: Petáková:
strana 37/cvičení 26 f)
strana 37/cvičení 27 d) e)

Shrnutí: Při opuštění exponenciálního vyjádření musíme postupovat podle základu mocnin. Pokud je základ menší než 1, obracíme znaménko nerovnosti.