

2.9.7 Soustavy exponenciálních rovnic

Předpoklady: 2906

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic:
$$\begin{cases} 2 \cdot 3^x + 3 \cdot 4^y = 24 \\ 3 \cdot 3^x - 10 \cdot 4^y = 7 \end{cases}$$

Ted' máme soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými \Rightarrow můžeme substituovat tak, aby po substituci soustava opět obsahovala dvě neznámé.

Substitute: $a = 3^x$, $b = 4^y$

Soustava rovnic:
$$\begin{array}{r} 2a + 3b = 24 \quad / \cdot 3 \\ 3a - 10b = 7 \quad / \cdot 2 \end{array}$$

$$6a + 9b = 72$$

$$6a - 20b = 14$$

Rovnice odečteme: $29b = 58$.

$$b = 2$$

Dopočteme a : $2a + 3b = 2a + 6 = 24$.

$$2a = 18$$

$$a = 9$$

Návrat k původní proměnné:

$$a = 9 = 3^x$$

$$3^2 = 3^x$$

$$x = 2$$

$$b = 2 = 4^y$$

$$4^{\frac{1}{2}} = 4^y$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$K = \left\{ \left[2; \frac{1}{2} \right] \right\}$$

Pedagogická poznámka: Objevují se studenti, kteří mají po předchozích zkušenostech, kdy jsme se substitucí na dvě proměnné bránili, problém s tím, že by po substituci v rovnicích byly dvě neznámé. Je potřeba jim připomenout, že se nachází v jiné situaci než dříve:

Řešíme soustavu rovnic, a proto dvě proměnné neznamenaají neřešitelný problém. Jelikož už před substitucí obsahovala soustava dvě proměnné, situace se navrhovanou substitucí nezmění.

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic:
$$\begin{cases} 0,5^x + 3^{y-1} = 25 \\ 2 \cdot 0,5^{x+3} - 3^{y-2} = 1 \end{cases}$$

Podobné předchozímu příkladu. Jak provést nejlepší substituci (aby vylezlo co nejméně zlomků):

- $a = 0,5^{x+3}$ (u základu 0,5 se nám hodí, když u něj zbudou záporné mocniny)
- $b = 3^{y-2}$ (u základu 3 chceme, aby zbyly kladné mocniny)

Substituce: $a = 0,5^{x+3}$, $0,5^x = 0,5^{x+3-3} = 0,5^{x+3} \cdot 0,5^{-3} = a \cdot 0,5^{-3} = 8a$,

$$b = 3^{y-2}, 3^{y-1} = 3^{y-2+1} = 3^{y-2}3^1 = 3b$$

Soustava rovnic:
$$\begin{aligned} 8a + 3b &= 25 \\ 2a - b &= 1 \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme b a dosadíme do první: $2a - b = 1 \Rightarrow b = 2a - 1$.

$$8a + 3(2a - 1) = 25$$

$$8a + 6a - 3 = 25$$

$$14a = 28$$

$$a = 2$$

Dopočteme b : $b = 2a - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Návrat k původní proměnné:

$$a = 2 = 0,5^{x+3}$$

$$2^1 = (2^{-1})^{x+3}$$

$$2^1 = 2^{-x-3}$$

$$1 = -x - 3$$

$$x = -4$$

$$K = \{[-4; 3]\}$$

$$b = 3 = 3^{y-2}$$

$$1 = y - 2$$

$$y = 3$$

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 81^{x+y} &= 27 \\ 81^x + 81^y &= 12 \end{aligned}$$

$$81^{x+y} = 27$$

$$81^x + 81^y = 12$$

Pomohla by substituce $81^x = a$, $81^y = b$, ale nevyhovuje první rovnice. Musíme soustavu upravit $81^{x+y} = 81^x \cdot 81^y$:

$$81^x \cdot 81^y = 27$$

$$81^x + 81^y = 12$$

Substituce: $81^x = a$, $81^y = b$

$$a \cdot b = 27$$

$$a + b = 12$$

Z druhé rovnice vyjádříme a a dosadíme do první: $a + b = 12 \Rightarrow b = 12 - a$.

$$ab = 27$$

$$a(12 - a) = 27$$

$$12a - a^2 = 27$$

$$a^2 - 12a + 27 = 0$$

$$(a - 3)(a - 9) = 0$$

$$a_1 = 3 \Rightarrow b_1 = 12 - a = 12 - 3 = 9$$

$$a_2 = 9 \Rightarrow b_1 = 12 - a = 12 - 9 = 3$$

V substituci jsme získali dvě dvojice čísel $[3; 9]; [9; 3]$ (dvojice jsou symetrické, protože i v zadání je symetrie – při prohození x a y by se soustava nezměnila).

Návrat k původní proměnné:

První řešení:

$$a_1 = 81^{x_1} = 3$$

$$b_1 = 81^{y_1} = 9$$

$$81^{x_1} = 3$$

$$81^{x_1} = 81^{\frac{1}{4}}$$

$$x_1 = \frac{1}{4}$$

$$K_1 = \left\{ \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \right\}$$

Druhé řešení:

$$a_2 = 81^{x_2} = 9$$

$$81^{x_2} = 9$$

$$81^{x_2} = 81^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$K_2 = \left\{ \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right] \right\}$$

$$K = \left\{ \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]; \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right] \right\}$$

$$81^{y_1} = 9$$

$$81^{y_1} = 81^{\frac{1}{2}}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = 81^{y_2} = 3$$

$$81^{y_2} = 3$$

$$81^{y_2} = 81^{\frac{1}{4}}$$

$$y_2 = \frac{1}{4}$$

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic
$$\begin{cases} 2^{x+y} + 2^{x-y-1} = 3^2 \\ 2^{x+y+1} - 3 \cdot 2^{x-y+1} = 2^2 \end{cases}$$

Máme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých \Rightarrow můžeme substituovat dvě neznámé, x a y se vyskytují pohromadě a zatím je nedokážeme oddělit.

Substituce:

$$a = 2^{x+y}, \quad 2^{x+y+1} = 2^{x+y} \cdot 2 = 2a$$

$$b = 2^{x-y-1} \text{ (vyhneme se zlomkům), } 2^{x-y+1} = 2^{x-y-1+2} = 2^{x-y-1} \cdot 2^2 = 4b$$

$$a + b = 9$$

$$2a - 3 \cdot 4b = 4$$

Z první rovnice vyjádříme a a dosadíme do druhé: $a + b = 9 \Rightarrow a = 9 - b$.

$$2(9 - b) - 12b = 4$$

$$18 - 2b - 12b = 4$$

$$14 = 14b$$

$$b = 1$$

Dopočteme a : $a = 9 - b = 9 - 1 = 8$.

Návrat k původní proměnné:

$$a = 2^{x+y} = 8$$

$$2^{x+y} = 2^3$$

$$x + y = 3$$

$$b = 2^{x-y-1} = 1$$

$$2^{x-y-1} = 2^0$$

$$x - y - 1 = 0$$

Získali jsme normální soustavu rovnic:

$$x + y = 3$$

$$x - y - 1 = 0$$

$$x + y = 3$$

(rovnice sečteme)

$$x - y = 1$$

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Dosadíme do druhé rovnice a dopočteme y : $2 - y = 1 \Rightarrow y = 1$.

$$K = \{[2; 1]\}$$

Př. 5: Urči reálná čísla a, b tak, aby graf funkce $y = 2^{x+a} + b$ procházel body $[-1; -2]$, $[2; 12]$.

Dosadíme oba body do předpisu funkce:

- $[-1; -2] \Rightarrow -2 = 2^{-1+a} + b$
- $[2; 12] \Rightarrow 12 = 2^{2+a} + b$

Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých \Rightarrow rovnice odečteme (zmizí b):

$$12 - (-2) = 2^{2+a} - 2^{-1+a}$$

$$14 = 2^2 \cdot 2^a - 2^{-1} \cdot 2^a$$

$$14 = 4 \cdot 2^a - \frac{1}{2} \cdot 2^a$$

$$14 = 2^a \left(4 - \frac{1}{2} \right) = 2^a \cdot 3,5$$

$$28 = 7 \cdot 2^a$$

$$2^a = 4$$

$$a = 2$$

Dopočítáme b : $-2 = 2^{-1+a} + b = 2^{-1+2} + b = 2 + b$

$$b = -4$$

Hledaná funkce má předpis $y = 2^{x+2} - 4$.

Př. 6: Vyřeš soustavu rovnic $x^{y+1} = 16$, $x^{3-y} = 1$.

Zcela odlišná situace než dosud: máme proměnou v exponentu i v základu. Substituce celých výrazů na levé straně soustavu nezjednoduší, ani nám neumožní „dostat neznámé od sebe“. Hledáme úpravu, která vytvoří rovnici s jedinou neznámou (jako sčítání při sčítací metodě).

Postřeh: první rovnice obsahuje x^y , druhá $x^{-y} \Rightarrow$ při vynásobení obou rovnic, by se y v exponentu odečetla \Rightarrow rovnice vynásobíme.

$$x^{y+1} = 16$$

$$x^{3-y} = 1$$

$$\overline{[1] \cdot [2]} \quad x^{y+1} \cdot x^{3-y} = 16 \cdot 1$$

$$x^{y+1+3-y} = 16$$

$$x^4 = 2^4$$

$x = \sqrt[4]{2^4} = 2$ (řešením rovnice $x^4 = 16$ je i číslo -2 , které však není řešením naší soustavy, protože v ní číslo x vystupuje jako základ mocnin)

Dopočteme y : $2^{3-y} = 1 = 2^0$

$$3 - y = 0$$

$$y = 3$$

$$K = \{[2; 3]\}$$

Př. 7: Petáková:
strana 34/cvičení 8 b) c) e) f)

Shrnutí: