2.9.7 Soustavy exponenciálních rovnic

Předpoklady: 2906

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic: $\begin{aligned} 2\cdot 3^x + 3\cdot 4^y &= 24 \\ 3\cdot 3^x - 10\cdot 4^y &= 7 \end{aligned}$.

Teď máme soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými $\Rightarrow$ můžeme substituovat tak, aby po substituci soustava opět obsahovala dvě neznámé.

Substituce: $a = 3^x$, $b = 4^y$

Soustava rovnic: $\begin{aligned} 2a + 3b &= 24 \quad / \cdot 3 \\ 3a - 10b &= 7 \quad / \cdot 2 \end{aligned}$.

$6a + 9b = 72$

$6a - 20b = 14$

Rovnice odečteme: $29b = 58$.

$b = 2$

Dopočteme *a*: $2a + 3b = 2a + 6 = 24$.

$2a = 18$

$a = 9$

Návrat k původní proměnné:

$a = 9 = 3^x$

$3^2 = 3^x$

$x = 2$

$b = 2 = 4^y$

$4^{\frac{1}{2}} = 4^y$

$y = \frac{1}{2}$

$K = \left\{ \left[2; \frac{1}{2} \right] \right\}$

Pedagogická poznámka: Objevují se studenti, kteří mají po předchozích zkušenostech, kdy jsme se substituci na dvě proměnné bránili, problém s tím, že by po substituci v rovnicích byly dvě neznámé. Je potřeba jim připomenout, že se nachází v jiné situaci než dříve:
Řešíme soustavu rovnic, a proto dvě proměnné neznamenají neřešitelný problém. Jelikož už před substitucí obsahovala soustava dvě proměnné, situace se navrhovanou substitucí nezmění.

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic: $\begin{aligned} 0{,}5^x + 3^{y-1} &= 25 \\ 2\cdot 0{,}5^{x+3} - 3^{y-2} &= 1 \end{aligned}$.

Podobné předchozímu příkladu. Jak provést nejlepší substituci (aby vylezlo co nejméně zlomků):

- $a = 0{,}5^{x+3}$ (u základu $0{,}5$ se nám hodí, když u něj zbudou záporné mocniny)
- $b = 3^{y-2}$ (u základu 3 chceme, aby zbyly kladné mocniny)

Substituce: $a=0,5^{x+3}$, $0,5^{x}=0,5^{x+3-3}=0,5^{x+3}\cdot 0,5^{-3}=a\cdot 0,5^{-3}=8a$,
$b=3^{y-2}$, $3^{y-1}=3^{y-2+1}=3^{y-2}3^{1}=3b$

Soustava rovnic: $\begin{array}{c} 8a+3b=25 \\ 2a-b=1 \end{array}$.

Z druhé rovnice vyjádříme b a dosadíme do první: $2a-b=1\Rightarrow b=2a-1$.

$8a+3(2a-1)=25$

$8a+6a-3=25$

$14a=28$

$a=2$

Dopočteme b: $b=2a-1=2\cdot 2-1=3$.

Návrat k původní proměnné:

$a=2=0,5^{x+3}$

$2^{1}=\left(2^{-1}\right)^{x+3}$

$2^{1}=2^{-x-3}$

$1=-x-3$

$x=-4$

$b=3=3^{y-2}$

$1=y-2$

$y=3$

$K=\{[-4;3]\}$

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{array}{c} 81^{x+y}=27 \\ 81^{x}+81^{y}=12 \end{array}$.

$81^{x+y}=27$

$81^{x}+81^{y}=12$

Pomohla by substituce $81^{x}=a$, $81^{y}=b$, ale nevyhovuje první rovnice. Musíme soustavu upravit $81^{x+y}=81^{x}\cdot 81^{y}$:

$81^{x}\cdot 81^{y}=27$

$81^{x}+81^{y}=12$

Substituce: $81^{x}=a$, $81^{y}=b$

$a\cdot b=27$

$a+b=12$

Z druhé rovnice vyjádříme a dosadíme do první: $a+b=12\Rightarrow b=12-a$.

$ab=27$

$a(12-a)=27$

$12a-a^{2}=27$

$a^{2}-12a+27=0$

$(a-3)(a-9)=0$

$a_1=3\Rightarrow b_1=12-a=12-3=9$

$a_2=9\Rightarrow b_1=12-a=12-9=3$

V substituci jsme získali dvě dvojice čísel $[3;9];[9;3]$ (dvojice jsou symetrické, protože i v zadání je symetrie – při prohození x a y by se soustava nezměnila).

Návrat k původní proměnné:

První řešení:

$a_1=81^{x_1}=3$

$b_1=81^{y_1}=9$

$81^{x_1} = 3$

$81^{x_1} = 81^{\frac{1}{4}}$

$x_1 = \frac{1}{4}$

$81^{y_1} = 9$

$81^{y_1} = 81^{\frac{1}{2}}$

$y_1 = \frac{1}{2}$

$K_1 = \left\{\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]\right\}$

Druhé řešení:

$a_2 = 81^{x_2} = 9$

$81^{x_2} = 9$

$81^{x_2} = 81^{\frac{1}{2}}$

$x_1 = \frac{1}{2}$

$b_2 = 81^{y_2} = 3$

$81^{y_2} = 3$

$81^{y_2} = 81^{\frac{1}{4}}$

$y_2 = \frac{1}{4}$

$K_2 = \left\{\left[\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right]\right\}$

$K = \left\{\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right];\left[\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right]\right\}$

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} 2^{x+y} + 2^{x-y-1} &= 3^2 \\ 2^{x+y+1} - 3\cdot 2^{x-y+1} &= 2^2 \end{aligned}$.

Máme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $\Rightarrow$ můžeme substituovat dvě neznámé, x a y se vyskytují pohromadě a zatím je nedokážeme oddělit.

Substituce:

$a = 2^{x+y}$, $2^{x+y+1} = 2^{x+y}\cdot 2 = 2a$

$b = 2^{x-y-1}$ (vyhneme se zlomkům), $2^{x-y+1} = 2^{x-y-1+2} = 2^{x-y-1}\cdot 2^2 = 4b$

$$\begin{aligned} a + b &= 9 \\ 2a - 3\cdot 4b &= 4 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme a a dosadíme do druhé: $a + b = 9 \Rightarrow a = 9 - b$.

$2(9-b) - 12b = 4$

$18 - 2b - 12b = 4$

$14 = 14b$

$b = 1$

Dopočteme a: $a = 9 - b = 9 - 1 = 8$.

Návrat k původní proměnné:

$a = 2^{x+y} = 8$

$2^{x+y} = 2^3$

$x + y = 3$

$b = 2^{x-y-1} = 1$

$2^{x-y-1} = 2^0$

$x - y - 1 = 0$

Získali jsme normální soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$ (rovnice sečteme)

$2x=4 \Rightarrow x=2$

Dosadíme do druhé rovnice a dopočteme *y*: $2-y=1 \Rightarrow y=1$. $K=\{[2;1]\}$

Př. 5: Urči reálná čísla *a*, *b* tak, aby graf funkce $y=2^{x+a}+b$ procházel body $[-1;-2]$, $[2;12]$.

Dosadíme oba body do předpisu funkce:

- $[-1;-2] \Rightarrow -2=2^{-1+a}+b$
- $[2;12] \Rightarrow 12=2^{2+a}+b$

Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $\Rightarrow$ rovnice odečteme (zmizí *b*):

$12-(-2)=2^{2+a}-2^{-1+a}$

$14=2^2\cdot 2^a-2^{-1}\cdot 2^a$

$14=4\cdot 2^a-\frac{1}{2}\cdot 2^a$

$14=2^a\left(4-\frac{1}{2}\right)=2^a\cdot 3{,}5$

$28=7\cdot 2^a$

$2^a=4$

$a=2$

Dopočítáme *b*: $-2=2^{-1+a}+b=2^{-1+2}+b=2+b$

$b=-4$

Hledaná funkce má předpis $y=2^{x+2}-4$.

Př. 6: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} x^{y+1}&=16\\ x^{3-y}&=1\end{aligned}$.

Zcela odlišná situace než dosud: máme proměnou v exponentu i v základu. Substituce celých výrazů na levé straně soustavu nezjednoduší, ani nám neumožní „dostat neznámé od sebe“. Hledáme úpravu, která vytvoří rovnici s jedinou neznámou (jako sčítání při sčítací metodě).

Postřeh: první rovnice obsahuje x^y, druhá x^{-y} $\Rightarrow$ při vynásobením obou rovnic, by se *y* v exponentu odečetla $\Rightarrow$ rovnice vynásobíme.

$$x^{y+1}=16$$

$$x^{3-y}=1$$

$[\![1]\!]\cdot[\![2]\!] \qquad x^{y+1}\cdot x^{3-y}=16\cdot 1$

$x^{y+1+3-y}=16$

$x^4=2^4$

$x=\sqrt[4]{2^4}=2$ (řešením rovnice $x^4=16$ je i číslo –2, které však není řešením naší soustavy, protože v ní číslo *x* vystupuje jako základ mocnin)

Dopočteme *y*: $2^{3-y}=1=2^0$

$3-y=0$

$y=3$

$K=\{[2;3]\}$

Př. 7: Petáková:
strana 34/cvičení 8 b) c) e) f)

Shrnutí: