2.9.5 Exponenciální rovnice II

Př. 1: Vyřeš rovnici $3\cdot 2^x + 2^x = 32$.

Substituce: $y = 2^x \Rightarrow 3y + y = 32$ $\quad 4y = 32$ $\quad y = 8$

Návrat k původní proměnné: $y = 2^x = 8$ $\quad 2^x = 8$ $\quad 2^x = 2^3$ $\quad x = 3$ $\quad K = \{3\}$

Př. 2: Vyřeš rovnici $2\cdot 3^x + 3^{x+1} = 5$.

Substituce: $y = 3^x \Rightarrow 2y + 3y = 5$ $\quad 5y = 5$ $\quad y = 1$

Návrat k původní proměnné: $y = 3^x = 1$ $\quad 3^x = 3^0$ $\quad x = 0$ $\quad K = \{0\}$

- $3^{x+1} = 3^{x\overbrace{-1+1}^{0}+1} = 3^{x-1}\cdot 3^2 = 9y$

Př. 3: Proveď substituci výrazů:
a) 2^{x+2}, 2^{x-1} pokud platí $y = 2^x$
b) 3^{x+2}, 3^{x-3} pokud platí $y = 3^{x-2}$
c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2}$ pokud platí $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$

a) 2^{x+2}, 2^{x-1} pokud platí $y = 2^x$

$2^{x+2} = 2^x\cdot 2^2 = 4y$ $\qquad 2^{x-1} = 2^x\cdot 2^{-1} = \frac{y}{2}$

b) 3^{x+2}, 3^{x-3} pokud platí $y = 3^{x-2}$

$3^{x+2} = 3^{x-2+2+2} = 3^{x-2}\cdot 3^4 = 81y$ $\qquad 3^{x-3} = 3^{x-2-1} = 3^{x-2}\cdot 3^{-1} = \frac{y}{3}$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2}$ pokud platí $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3y}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1-1-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = y\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4y}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\left[\frac{3}{2}\right]^{-1}\right)^{x+2} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}\right]^{-1} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} = \left[\frac{3y}{2}\right]^{-1} = \frac{2}{3y}$$

Ještě jedna dobrá rada: Možností, jak provést substituci, je většinou více. Snažíme se najít takovou, která co nejvíce zjednoduší další výpočet (složitější výraz v substituci).

Př. 4: Vyřeš rovnici $\frac{3^{x+4}}{9} + 9\cdot 3^x = \frac{2}{3}$.

$$\frac{3^x\cdot 3^4}{9} + 9\cdot 3^x = \frac{2}{3}$$

Substituce: $y = 3^x \Rightarrow \frac{y\cdot 3^4}{3^2} + 9\cdot y = \frac{2}{3}$ $\quad 9y + 9y = \frac{2}{3}$ $\quad 18y = \frac{2}{3}$ $\quad y = \frac{1}{27}$

Návrat k původní proměnné: $y = 3^x = \frac{1}{27}$ $\quad 3^x = \frac{1}{27} = 3^{-3}$ $\quad x = -3$ $\quad K = \{-3\}$

Př. 5: Vyřeš rovnici $3^x - 2\cdot 3^{x-1} + 3^{x-2} - 2\cdot 3^{x-3} = 30$.

Substituce: $y = 3^{x-3}$, $3^x = 3^{x-3}\cdot 3^3 = 27y$, $3^{x-1} = 3^{x-3}\cdot 3^2 = 9y$, $3^{x-2} = 3^{x-3}\cdot 3^1 = 3y$

$27y-2\cdot 9y+3y-2\cdot y=30 \quad 10y=30 \quad y=3$

Návrat k původní proměnné: $y=3^{x-3}=3 \quad x-3=1 \quad x=4 \quad K=\{4\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici $2^{2-x}=2^{4-x}-3\sqrt[3]{2}$.

$2^{2-x}=2^2\cdot 2^{2-x}-3\sqrt[3]{2}$

Substituce: $y=2^{2-x} \quad y=4y-3\sqrt[3]{2} \quad 3\sqrt[3]{2}=3y \quad y=\sqrt[3]{2}$

Návrat k původní proměnné: $y=2^{2-x}=\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}} \quad 2-x=\frac{1}{3} \quad 2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}=x$

Př. 7: Vyřeš rovnici $2\cdot 4^x-9\cdot 2^x+4=0$.

$2\cdot 4^x-9\cdot 2^x+4=0 \quad 2\cdot\left(2^2\right)^x-9\cdot 2^x+4=0 \quad 2\cdot\left(2^x\right)^2-9\cdot 2^x+4=0$

Substituce: $y=2^x \quad 2y^2-9y+4=0$

Kvadratická rovnice: $y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot 2\cdot 4}}{2\cdot 2}=\frac{9\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{9\pm 7}{4}$

$y_1=\frac{9+7}{4}=4 \quad y_2=\frac{9-7}{4}=\frac{1}{2}$

Návrat k původní proměnné:

$y_1=2^{x_1}=4 \quad 2^{x_1}=2^2 \quad x_1=2 \quad y_2=2^{x_2}=\frac{1}{2} \quad 2^{x_2}=2^{-1} \quad x_2=-1$

$K=\{-1;2\}$

Př. 8: Vyřeš rovnici $4^x+4^{\frac{3}{2}-x}=9$.

$4^x+\frac{\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4^x}=9 \quad 4^x+\frac{8}{4^x}=9$

Substituce: $4^x=a \quad a+\frac{8}{a}=9 \quad /\cdot a \quad a^2+8=9a \quad a^2-9a+8=0$

$(a-8)(a-1)=0 \quad a_1=8 \quad a_2=1$

$a_1=4^{x_1}=8 \quad \left(2^2\right)^{x_1}=2^{2x_1}=2^3 \quad a_2=4^{x_2}=1 \quad 4^{x_2}=4^0$

$2x_1=3 \quad x_1=\frac{3}{2} \quad x_2=0$

$K=\left\{0;\frac{3}{2}\right\}$

Př. 9: Vyřeš rovnici $4^{x-0,2}-2\cdot 4^{0,2-x}=1$.

$4^{x-0,2}-\frac{2}{4^{x-0,2}}=1$

Substituce: $4^{x-0,2}=a \quad a-\frac{2}{a}=1 \quad /\cdot a \quad a^2-2=a$

$a^2-a-2=0 \quad (a-2)(a+1)=0 \quad a_1=2 \quad a_2=-1$

$a_1=4^{x_1-0,2}=2 \quad \left(2^2\right)^{x_1-0,2}=2^{2x_1-0,4}=2^1$

$2x_1-0,4=1 \quad 2x_1=1,4 \quad x_1=0,7$

$a_2=4^{x_2-0,2}=-1$

Mocnina čísla 4 nemůže být nikdy záporné číslo $\Rightarrow K_2=\emptyset$

$K=\{0,7\}$