

2.9.5 Exponenciální rovnice II

Př. 1: Vyřeš rovnici $3 \cdot 2^x + 2^x = 32$.

Substituce: $y = 2^x \Rightarrow 3y + y = 32$ $4y = 32$ $y = 8$

Návrat k původní proměnné: $y = 2^x = 8$ $2^x = 8$ $2^x = 2^3$ $x = 3$ $K = \{3\}$

Př. 2: Vyřeš rovnici $2 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 5$.

Substituce: $y = 3^x \Rightarrow 2y + 3y = 5$ $5y = 5$ $y = 1$

Návrat k původní proměnné: $y = 3^x = 1$ $3^x = 3^0$ $x = 0$ $K = \{0\}$

- $3^{x+1} = 3^{\frac{0}{x-1+1+1}} = 3^{x-1} \cdot 3^2 = 9y$

Př. 3: Proveď substituci výrazů:

a) 2^{x+2} , 2^{x-1} pokud platí $y = 2^x$

b) 3^{x+2} , 3^{x-3} pokud platí $y = 3^{x-2}$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2}$ pokud platí $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$

a) 2^{x+2} , 2^{x-1} pokud platí $y = 2^x$

$$2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4y \qquad 2^{x-1} = 2^x \cdot 2^{-1} = \frac{y}{2}$$

b) 3^{x+2} , 3^{x-3} pokud platí $y = 3^{x-2}$

$$3^{x+2} = 3^{x-2+2+2} = 3^{x-2} \cdot 3^4 = 81y \qquad 3^{x-3} = 3^{x-2-1} = 3^{x-2} \cdot 3^{-1} = \frac{y}{3}$$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2}$ pokud platí $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3y}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1-1-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = y \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4y}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^{x+2} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}\right]^{-1} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} = \left[\frac{3y}{2}\right]^{-1} = \frac{2}{3y}$$

Ještě jedna dobrá rada: Možností, jak provést substituci, je většinou více. Snažíme se najít takovou, která co nejvíce zjednoduší další výpočet (složitější výraz v substituci).

Př. 4: Vyřeš rovnici $\frac{3^{x+4}}{9} + 9 \cdot 3^x = \frac{2}{3}$.

$$\frac{3^x \cdot 3^4}{9} + 9 \cdot 3^x = \frac{2}{3}$$

Substituce: $y = 3^x \Rightarrow \frac{y \cdot 3^4}{3^2} + 9 \cdot y = \frac{2}{3}$ $9y + 9y = \frac{2}{3}$ $18y = \frac{2}{3}$ $y = \frac{1}{27}$

Návrat k původní proměnné: $y = 3^x = \frac{1}{27}$ $3^x = \frac{1}{27} = 3^{-3}$ $x = -3$ $K = \{-3\}$

Př. 5: Vyřeš rovnici $3^x - 2 \cdot 3^{x-1} + 3^{x-2} - 2 \cdot 3^{x-3} = 30$.

Substituce: $y = 3^{x-3}$, $3^x = 3^{x-3} \cdot 3^3 = 27y$, $3^{x-1} = 3^{x-3} \cdot 3^2 = 9y$, $3^{x-2} = 3^{x-3} \cdot 3^1 = 3y$

$$27y - 2 \cdot 9y + 3y - 2 \cdot y = 30 \quad 10y = 30 \quad y = 3$$

Návrat k původní proměnné: $y = 3^{x-3} = 3 \quad x-3=1 \quad x=4 \quad K = \{4\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici $2^{2-x} = 2^{4-x} - 3\sqrt[3]{2}$.

$$2^{2-x} = 2^2 \cdot 2^{-x} - 3\sqrt[3]{2}$$

Substitute: $y = 2^{2-x} \quad y = 4y - 3\sqrt[3]{2} \quad 3\sqrt[3]{2} = 3y \quad y = \sqrt[3]{2}$

Návrat k původní proměnné: $y = 2^{2-x} = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \quad 2-x = \frac{1}{3} \quad 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = x$

Př. 7: Vyřeš rovnici $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$.

$$2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0 \quad 2 \cdot (2^2)^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0 \quad 2 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$$

Substitute: $y = 2^x \quad 2y^2 - 9y + 4 = 0$

Kvadratická rovnice: $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}$

$$y_1 = \frac{9+7}{4} = 4 \quad y_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = 2^{x_1} = 4 \quad 2^{x_1} = 2^2 \quad x_1 = 2 \quad y_2 = 2^{x_2} = \frac{1}{2} \quad 2^{x_2} = 2^{-1} \quad x_2 = -1$$

$$K = \{-1; 2\}$$

Př. 8: Vyřeš rovnici $4^x + 4^{\frac{3}{2-x}} = 9$.

$$4^x + \frac{(2^2)^{\frac{3}{2}}}{4^x} = 9 \quad 4^x + \frac{8}{4^x} = 9$$

Substitute: $4^x = a \quad a + \frac{8}{a} = 9 \quad / \cdot a \quad a^2 + 8 = 9a \quad a^2 - 9a + 8 = 0$

$$(a-8)(a-1) = 0 \quad a_1 = 8 \quad a_2 = 1$$

$$a_1 = 4^{x_1} = 8 \quad (2^2)^{x_1} = 2^{2x_1} = 2^3 \quad a_2 = 4^{x_2} = 1 \quad 4^{x_2} = 4^0$$

$$2x_1 = 3 \quad x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = 0$$

$$K = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$$

Př. 9: Vyřeš rovnici $4^{x-0,2} - 2 \cdot 4^{0,2-x} = 1$.

$$4^{x-0,2} - \frac{2}{4^{x-0,2}} = 1$$

Substitute: $4^{x-0,2} = a \quad a - \frac{2}{a} = 1 \quad / \cdot a \quad a^2 - 2 = a$

$$a^2 - a - 2 = 0 \quad (a-2)(a+1) = 0 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = -1$$

$$a_1 = 4^{x_1-0,2} = 2 \quad (2^2)^{x_1-0,2} = 2^{2x_1-0,4} = 2^1 \quad a_2 = 4^{x_2-0,2} = -1$$

$$2x_1 - 0,4 = 1 \quad 2x_1 = 1,4 \quad x_1 = 0,7$$

Mocnina čísla 4 nemůže být nikdy záporné číslo $\Rightarrow K_2 = \emptyset$

$$K = \{0,7\}$$