2.9.3 Exponenciální závislosti

Př. 1: Tvůj předek uložil v bance u příležitosti založení Univerzity Karlovy v roce 1348 2 Kč na tří procentní úrok. Urči kolik peněz by sis mohl vybrat na financování Tvého vysokoškolského studia v roce 2009. Předpokládej (což je samozřejmě nesmyslné), že během spoření se podmínky neměnily a nedošlo ke znehodnocování měny.

1348 … 2 Kč

1349 … 2 Kč (vložené peníze) + $2\cdot 0,03$ Kč (úrok), celkem $2+2\cdot 0,03=2(1+0,03)$

1350 … $2(1+0,03)$ Kč (uložené peníze) + $2(1+0,03)\cdot 0,03$ Kč (úrok), celkem

$2(1+0,03)+2(1+0,03)\cdot 0,03=2(1+0,03)(1+0,03)=2(1+0,03)^2$

1351 … $2(1+0,03)^2$ Kč (uložené peníze) + $2(1+0,03)^2\cdot 0,03$ Kč (úrok), celkem

$2(1+0,03)^2+2(1+0,03)^2\cdot 0,03=2(1+0,03)^2(1+0,03)=2(1+0,03)^3$

1358 (po 10 letech) … $2(1+0,03)^{10}$

Po x letech … $2(1+0,03)^x$

2009 … $2(1+0,03)^{2009-1348}=611555006,4$.

Př. 2: Využij řešení předchozího příkladu k nalezení vzorce, který udává našetřenou částku v závislosti na: počátečním vkladu n_0, úroku p a době spoření t. Pomocí vzorce pak urči naspořené částky pro následující (reálné případy):
a) 10000 Kč uložených s úrokem 1,5% na 2 roky.
b) 100000 Kč uložených s úrokem 2,5% na 10 let.
c) 1000000 Kč uložených s úrokem 3% na 20 let.

$2(1+0,03)^x$ Kč. $n_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ Kč.

počáteční vklad n_0	úrok p %	délka spoření t	dosazení	naspořená částka
10000	1,5	2	$10000\left(1+\frac{1,5}{100}\right)^2$	10302, 30
100000	2,5	10	$100000\left(1+\frac{2,5}{100}\right)^{10}$	128008, 50
1000000	3	20	$1000000\left(1+\frac{3}{100}\right)^{20}$	1806111, 20

Př. 3: Zkorumpovaný politik vyšmelil při zadávání zakázek na ministerstvu obrany 10 miliónů. Protože platí zákon o přiznávání příjmů, nemůže peníze uložit do banky a přechovává je doma ve zlaceném slamníku. Urči hodnotu peněz po 20 letech, pokud inflace bude dosahovat průměrně 5% ročně.

po 1. roce .... $10^7\cdot 1,05$

po x. letech .... $10^7\cdot 1,05^x$

po 20. letech .... $10^7\cdot 1,05^{20}=26532977$ Kč

26 532 977 Kč … 10 000 000 Kč
10 000 000 Kč … x Kč

$$\frac{x}{10000000}=\frac{10000000}{26532977}\Rightarrow x=10000000\cdot\frac{10000000}{26532977}=3768895\text{ Kč}$$

Při pětiprocentní inflaci bude mít za dvacet let 10 miliónů Kč stejnou hodnotu, jakou má v dnešní době 3768895 Kč (peníze tak ztratí přes 64% své hodnoty).

Př. 4: Poločas rozpadu radonu ^{219}R je $4\,\mathrm{s}$. Na počátku pokusu byly 2 g. Urči jaké množství radonu zbylo 2,5 minutách.

po 4 s ……. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$ (rozpadla se polovina atomů)

po 12 s……. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$

po x s ……. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$

Po 150 s $x=150 \Rightarrow m=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{150}{4}}=1{,}03\cdot10^{-11}\ \mathrm{g}$.

Př. 5: Poločas rozpadu látky ^{A}X je $0{,}5\,\mathrm{s}$. Urči jaké množství látky *X* zbylo po 2,5 minutě z 10 g na začátku pokusu.

po 0,5 s ……. $10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$ (rozpadla se polovina atomů)

po 1 s ……. $10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (rozpadla se polovina z poloviny atomů)

po x s ……. $10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

po 150 s $x=150 \Rightarrow m=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot150}=4{,}9\cdot10^{-90}\ \mathrm{g}$.

Př. 6: Vysvětli, jak je možné, že ve vztahu odvozeném pro množství látky v předchozím příkladě se na rozdíl od předchozího příkladu s radonem ^{219}R nevyskytuje poločas rozpadu látky *X*.

Př. 7: Intenzita rentgenových paprsků se sníží na polovinu při průchodu vrstvou olova o tloušťce 13,5 mm. Jak se změní intenzita paprsků, pokud projdou olověnou deskou o tloušťce 50 mm?

po $13{,}5\,\mathrm{mm}$ ……. $1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$ (intenzita se snížila na polovinu)

po $2\cdot(13{,}5)\,\mathrm{mm}$ ……. $1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (intenzita se snížila na polovinu poloviny)

po x mm ……. $1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13{,}5}}$

Můžeme dosadit: po 50 mm $x=50 \Rightarrow I=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13{,}5}}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{50}{13{,}5}}=0{,}077$.

Př. 8: Urči tloušťku olověné desky, která zeslabí intenzitu rentgenových paprsků na desetinu původní hodnoty. Využij údaje z předchozího příkladu.

Pro intenzitu rentgenových paprsků při průchodu olovem platí: $I=I_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13{,}5}}$.

$I_0\frac{1}{10}=I_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13{,}5}}$ $\frac{1}{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13{,}5}}$