

2.9.3 Exponenciální závislosti

Př. 1: Tvůj předek uložil v bance u příležitosti založení Univerzity Karlovy v roce 1348 2 Kč na tří procentní úrok. Urči kolik peněz by sis mohl vybrat na financování Tvého vysokoškolského studia v roce 2009. Předpokládej (což je samozřejmě nesmyslné), že během spoření se podmínky neměnily a nedošlo ke znehodnocování měny.

1348 ... 2 Kč

1349 ... 2 Kč (vložené peníze) + $2 \cdot 0,03$ Kč (úrok), celkem $2 + 2 \cdot 0,03 = 2(1 + 0,03)$

1350 ... $2(1 + 0,03)$ Kč (uložené peníze) + $2(1 + 0,03) \cdot 0,03$ Kč (úrok), celkem

$$2(1 + 0,03) + 2(1 + 0,03) \cdot 0,03 = 2(1 + 0,03)(1 + 0,03) = 2(1 + 0,03)^2$$

1351 ... $2(1 + 0,03)^2$ Kč (uložené peníze) + $2(1 + 0,03)^2 \cdot 0,03$ Kč (úrok), celkem

$$2(1 + 0,03)^2 + 2(1 + 0,03)^2 \cdot 0,03 = 2(1 + 0,03)^2(1 + 0,03) = 2(1 + 0,03)^3$$

1358 (po 10 letech) ... $2(1 + 0,03)^{10}$

Po x letech ... $2(1 + 0,03)^x$

2009 ... $2(1 + 0,03)^{2009-1348} = 611555006,4$.

Př. 2: Využij řešení předchozího příkladu k nalezení vzorce, který udává našetřenou částku v závislosti na: počátečním vkladu n_0 , úroku p a době spoření t . Pomocí vzorce pak urči naspořené částky pro následující (reálné případy):

- 10000 Kč uložených s úrokem 1,5% na 2 roky.
- 100000 Kč uložených s úrokem 2,5% na 10 let.
- 1000000 Kč uložených s úrokem 3% na 20 let.

$$2(1 + 0,03)^x \text{ Kč.} \qquad n_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \text{ Kč.}$$

počáteční vklad n_0	úrok p %	délka spoření t	dosazení	naspořená částka
10000	1,5	2	$10000 \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^2$	10302, 30
100000	2,5	10	$100000 \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^{10}$	128008, 50
1000000	3	20	$1000000 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^{20}$	1806111, 20

Př. 3: Zkorumpovaný politik vyšmelil při zadávání zakázek na ministerstvu obrany 10 miliónů. Protože platí zákon o přiznávání příjmů, nemůže peníze uložit do banky a přechovává je doma ve zlaceném slamníku. Urči hodnotu peněz po 20 letech, pokud inflace bude dosahovat průměrně 5% ročně.

po 1. roce $10^7 \cdot 1,05$

po x . letech $10^7 \cdot 1,05^x$

po 20. letech $10^7 \cdot 1,05^{20} = 26532977$ Kč

26 532 977 Kč ... 10 000 000 Kč

10 000 000 Kč ... x Kč

$$\frac{x}{10000000} = \frac{10000000}{26532977} \Rightarrow x = 10000000 \cdot \frac{10000000}{26532977} = 3768895 \text{ Kč}$$

Při pětiprocentní inflaci bude mít za dvacet let 10 miliónů Kč stejnou hodnotu, jakou má v dnešní době 3768895 Kč (peníze tak ztratí přes 64% své hodnoty).

Př. 4: Poločas rozpadu radonu ^{219}R je 4 s. Na počátku pokusu byly 2 g. Urči jaké množství radonu zbylo 2,5 minutách.

po 4 s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$ (rozpadla se polovina atomů)

po 12 s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

po x s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$

Po 150 s $x = 150 \Rightarrow m = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{150}{4}} = 1,03 \cdot 10^{-11}$ g.

Př. 5: Poločas rozpadu látky ^AX je 0,5 s. Urči jaké množství látky X zbylo po 2,5 minutě z 10 g na začátku pokusu.

po 0,5 s $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$ (rozpadla se polovina atomů)

po 1 s $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ (rozpadla se polovina z poloviny atomů)

po x s $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

po 150 s $x = 150 \Rightarrow m = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot 150} = 4,9 \cdot 10^{-90}$ g.

Př. 6: Vysvětli, jak je možné, že ve vztahu odvozeném pro množství látky v předchozím příkladě se na rozdíl od předchozího příkladu s radonem ^{219}R nevyskytuje poločas rozpadu látky X .

Př. 7: Intenzita rentgenových paprsků se snížila na polovinu při průchodu vrstvou olova o tloušťce 13,5 mm. Jak se změní intenzita paprsků, pokud projdou olověnou deskou o tloušťce 50 mm?

po 13,5 mm $1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$ (intenzita se snížila na polovinu)

po $2 \cdot (13,5)$ mm $1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ (intenzita se snížila na polovinu poloviny)

po x mm $1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}$

Můžeme dosadit: po 50 mm $x = 50 \Rightarrow I = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{50}{13,5}} = 0,077$.

Př. 8: Urči tloušťku olověné desky, která zeslabí intenzitu rentgenových paprsků na desetinu původní hodnoty. Využij údaje z předchozího příkladu.

Pro intenzitu rentgenových paprsků při průchodu olovem platí: $I = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}$.

$$I_0 \frac{1}{10} = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}} \qquad \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}$$