

2.9.3 Exponenciální závislosti

Předpoklady: 2902

Pedagogická poznámka: Látka připravená v této hodině zabere tak jeden a půl vyučovací hodiny.

Proč probíráme tak exotickou funkci jako je exponenciální?
V životě existuje spousta závislostí, které popisuje právě exponenciální funkce.

Př. 1: Tvůj předek uložil v bance u příležitosti založení Univerzity Karlovy v roce 1348 2 Kč na tří procentní úrok. Urči kolik peněz by sis mohl vybrat na financování Tvého vysokoškolského studia v roce 2009. Předpokládej (což je samozřejmě nesmyslné), že během spoření se podmínky neměnily a nedošlo ke znehodnocování měny.

Jak se měnilo množství uložených peněz:

1348 ... 2 Kč

1349 ... 2 Kč (vložené peníze) + $2 \cdot 0,03$ Kč (úrok), celkem $2 + 2 \cdot 0,03 = 2(1 + 0,03)$

Necháme výraz v tomto tvaru, abychom mohli najít funkční závislost. Výraz $2(1 + 0,03)$ vyjadřuje částku na konci roku 1349, která bude v bance po celý rok 1350 a která bude úročena.

1350 ... $2(1 + 0,03)$ Kč (uložené peníze) + $2(1 + 0,03) \cdot 0,03$ Kč (úrok), celkem

$$2(1 + 0,03) + 2(1 + 0,03) \cdot 0,03 = 2(1 + 0,03)(1 + 0,03) = 2(1 + 0,03)^2$$

1351 ... $2(1 + 0,03)^2$ Kč (uložené peníze) + $2(1 + 0,03)^2 \cdot 0,03$ Kč (úrok), celkem

$$2(1 + 0,03)^2 + 2(1 + 0,03)^2 \cdot 0,03 = 2(1 + 0,03)^2(1 + 0,03) = 2(1 + 0,03)^3$$

1352 ... $2(1 + 0,03)^4$

1353 ... $2(1 + 0,03)^5$

1358 (po 10 letech) ... $2(1 + 0,03)^{10}$

1448 (po 100 letech) ... $2(1 + 0,03)^{100}$

Po x letech ... $2(1 + 0,03)^x$

Ted' můžeme dosadit a dopočítat úlohu:

$$2009 \text{ ... } 2(1 + 0,03)^{2009-1348} = 611555006,4.$$

Za podmínek uvedených v zadání bychom mohli vybrat 611 555 006 Kč a 40 ha (za to už se dá studovat poměrně bez problémů).

Pedagogická poznámka: Studenti příklad samozřejmě nepočítají sami od začátku. Částku ušetřenou po prvním roce počítám na tabuli, pak postupně počítají čím dál více oni. Výsledky kontrolujeme po jednotlivých rocích.

Poznámka: Na první pohled to vypadá, že je velmi jednoduché uspořit velkou částku. Ohromující výsledek 612 našetřených miliónů je ale důsledkem toho, že exponenciální funkce

roste čím dál rychleji a že jsme v příkladě spořili nereálně dlouhou dobu. Když budeme sledovat naspořenou částku po stoletích, uvidíme, že k naspoření 1 miliónu je potřeba 500 let.

rok	délka spoření	dosazení	naspořená částka
1448	100	$2(1+0,03)^{1448-1348}$	38, 40
1548	200	$2(1+0,03)^{1548-1348}$	738, 70
1648	300	$2(1+0,03)^{1648-1348}$	14197, 00
1748	400	$2(1+0,03)^{1748-1348}$	272847, 40
1848	500	$2(1+0,03)^{1848-1348}$	5243754, 50
1948	600	$2(1+0,03)^{1948-1348}$	100777787, 30
2048	700	$2(1+0,03)^{2048-1348}$	1936811206, 00

- Př. 2:** Využij řešení předchozího příkladu k nalezení vzorce, který udává našetřenou částku v závislosti na: počátečním vkladu n_0 , úroku p a době spoření t . Pomocí vzorce pak urči naspořené částky pro následující (reálné případy):
- 10000 Kč uložených s úrokem 1,5% na 2 roky.
 - 100000 Kč uložených s úrokem 2,5% na 10 let.
 - 1000000 Kč uložených s úrokem 3% na 20 let.

V předchozím příkladě jsme zjistili, že po x letech spoření s počátečním vkladem 2 Kč na tříprocentní úrok budeme mít naspořeno $2(1+0,03)^x$ Kč.

Porovnáním vzorce se zadanými veličinami vidíme, že při počátečním vkladu n_0 , úroku p a době spoření t našetříme $n_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ Kč.

počáteční vklad n_0	úrok p %	délka spoření t	dosazení	naspořená částka
10000	1,5	2	$10000 \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^2$	10302, 30
100000	2,5	10	$100000 \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^{10}$	128008, 50
1000000	3	20	$1000000 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^{20}$	1806111, 20

Pedagogická poznámka: Nejvíce chyb se při sestavování vzorců vyskytuje kolem procent. Všem chybujícím doporučuji, aby si svůj vzorec vyzkoušeli dosazením konkrétních čísel z předchozího zadání.

Poznámka: Stejně jako u předchozího příkladu je vidět, že na velikost naspořené částky má největší vliv doba spoření.

Poznámka: Odvozený vzorec $n = n_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ se standardně používá ve finanční matematice

pro takzvané složené úrokování (případ, se kterým jsme počítali. Úroky se nevybírají, ale přidávají se k uložené částce). Další vzorce finanční matematiky budeme probírat později, každopádně tento vzorec je příkladem **znalosti opravdu použitelné i v reálném životě**.

Peníze uložené do banky nesou zisk ve formě úroků.

Bohužel peníze uložené i neuložené také ztrácejí hodnotu díky inflaci (zdražování zboží, všechno stojí víc, než kolik to stálo před několika lety).

Inflace se stejně jako úroky udává v procentech. Pokud je roční míra inflace 5%, znamená to, že zboží, které na začátku roku stálo 100 Kč, bude na konci roku stát 105 Kč \Rightarrow za 100 Kč nakoupíte na konci roku méně než byste nakoupili na začátku roku. Peníze ztrácejí hodnotu.

Př. 3: Zkorumpovaný politik vyšmelil při zadávání zakázek na ministerstvu obrany 10 miliónů. Protože platí zákon o přiznávání příjmů, nemůže peníze uložit do banky a přechovává je doma ve zclacném slammíku. Urči hodnotu peněz po 20 letech, pokud inflace bude dosahovat průměrně 5% ročně.

Nejdříve určíme kolik peněz bude nutné po dvaceti letech na nákup zboží v hodnotě 10 miliónů v současnosti. Poté přepočítáme hodnotu neúročených 10 miliónů.

Kolik peněz potřebujeme na nákup zboží, které mělo na začátku cenu 10 miliónů.

po 1. roce $10^7 \cdot 1,05$

po 2. letech $(10^7 \cdot 1,05)1,05 = 10^7 \cdot 1,05^2$ (na počátku roku by bylo potřeba $10^7 \cdot 1,05$ Kč)

po 3. letech $10^7 \cdot 1,05^3$

po x. letech $10^7 \cdot 1,05^x$

Teď můžeme dosadit 20 let a určit množství peněz v hodnotě 10 miliónů.

po 20. letech $10^7 \cdot 1,05^{20} = 26532977$ Kč

Po dvaceti letech potřebujeme 26 532 977 Kč na nákup zboží, které před tím stálo 10 000 000 Kč. Hodnotu 10 miliónů spočteme přímou úměrností:

26 532 977 Kč ... 10 000 000 Kč

10 000 000 Kč ... x Kč

$$\frac{x}{10000000} = \frac{10000000}{26532977} \Rightarrow x = 10000000 \cdot \frac{10000000}{26532977} = 3768895 \text{ Kč}$$

Při pětiprocentní inflaci bude mít za dvacet let 10 miliónů Kč stejnou hodnotu, jakou má v dnešní době 3768895 Kč (peníze tak ztratí přes 64% své hodnoty).

Poznámka: Předchozí příklad se často řeší (podle mě nesprávně) ubýváním hodnoty peněz takto:

Roční míra inflace 5% znamená, že peníze ztratí 5% hodnoty \Rightarrow 95% hodnoty si zachovají.

počáteční částka ... 10^7 Kč

po 1. roce ... $10^7 \cdot 0,95$

po 2. letech ... $(10^7 \cdot 0,95)0,95 = 10^7 \cdot 0,95^2$ (na počátku roku má jenom $10^7 \cdot 0,95$ Kč)

po 3. letech ... $10^7 \cdot 0,95^3$

po x. letech ... $10^7 \cdot 0,95^x$

Ted' můžeme dosadit za čas 20 let a určit hodnotu peněz.

po 20. letech $10^7 \cdot 0,95^{20} = 3584859,20$ Kč

Po 20 letech bude hodnota peněz už pouze 3 584 859,20 Kč.

Př. 4: Poločas rozpadu radonu ^{219}R je 4 s . Na počátku pokusu byly 2 g. Urči jaké množství radonu zbylo 2,5 minutách.

Radioaktivní látky se v přírodě rozpadají samovolně tak, že bez ohledu na množství látky se po uplynutí určité doby rozpadne vždy polovina atomů. (jde o důsledek toho, že si atomy nepamatují svůj věk) Tato doba je u každého druhu atomů jiná a nazývá se poločas rozpadu.

po 0 s 2 g

Co se stane po 1 s nevíme, ale víme, co bude po 4 s.

po 4 s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$ (rozpadla se polovina atomů)

Další okamžik, kdy budeme vědět, co se děje, přijde opět za 4 s, tedy v 8s od začátku pokusu.

po 8 s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ (z poloviny atomů, které zbyly po prvních čtyřech

sekundách, se rozpadla zase polovina)

po 12 s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Ted' bychom dokázali určit množství látky vždy, když je čas násobkem čtyř, ale my potřebujeme vztah, do kterého se dá dosadit jakýkoliv čas.

V exponentu mocniny je vždy čtyřikrát menší číslo, než je dosazovaný čas. \Rightarrow

po x s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$

Můžeme dosadit:

Po 150 s $x = 150 \Rightarrow m = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{150}{4}} = 1,03 \cdot 10^{-11}$ g.

Po 150 s zbude z 2 g radonu ^{219}R pouze $1,03 \cdot 10^{-11}$ g.

Pedagogická poznámka: Sestavení závislosti bývalo vždy problémem. Třídy vyučované podle učebnic je zvládají velmi dobře. Mám pocit, že když dostanou volnost najdou si všichni pohled, který jim vyhovuje a pomocí kterého příklady vyřeší.

Poznámka: Kamenem úrazu při řešení těchto příkladů bývá určení výrazu v exponentu. Pokud přímý postup použitý v řešení příkladu nestačí můžeme se pokusit i jinak:

Dělit intervaly na „čtyřsekundy“:

po 4s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

po 8s = 2 · 4s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

po 12s = 3 · 4s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Číslo v exponentu označuje počet čtyřsekundových intervalů, které uplynuly od začátku

pokusu. \Rightarrow Těchto intervalů je $\frac{x}{4}$. \Rightarrow Po x s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$.

Použit neznámou:

V exponentu je určitě násobek času \Rightarrow po t s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t \cdot k}$

Konstantu k určíme z toho, co už víme:

po 4 s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t \cdot k} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4 \cdot k} \Rightarrow 4k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

po 8 s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t \cdot k} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8 \cdot k} \Rightarrow 8k = 2 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

po x s $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$

Z předchozího příkladu je dobře vidět, proč ho nemůžeme řešit přímou úměrností. Pokud bychom ji použili vyšlo by:

po 4s ... 1g (se rozpadne)

po 8s ... x g

$\frac{x}{1} = \frac{8}{4} = 2g \Rightarrow$ Po 8 s už nezbude ani jeden atom \Rightarrow mezi 5. a 8. sekundou se nerozpadl

každý druhý, ale všechny atomy, které se nestihly rozpadnout během prvních čtyř sekund.

Což je v rozporu s významem poločasu rozpadu. Přímá úměrnost totiž předpokládá, že každé čtyři sekundy se rozpadne stejný počet atomů (stejná hmotnost látky), což je v rozporu se skutečností, neboť během jednoho poločasu rozpadu se vždy rozpadne stejná část atomů (a tedy v případě menšího množství látky se rozpadne méně atomů).

Př. 5: Poločas rozpadu látky ${}^A X$ je 0,5 s. Urči jaké množství látky X zbylo po 2,5 minutě z 10 g na začátku pokusu.

po 0 s 10 g

Další okamžik, ve kterém známe situaci, je už po 0,5 s.

po 0,5 s $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$ (rozpadla se polovina atomů)

po 1 s $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ (rozpadla se polovina z poloviny atomů)

po 1,5 s $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

po 2 s $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$

Číslo v exponentu je vždy dvakrát větší než čas. \Rightarrow

po x s $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

Můžeme dosadit: 2,5 minuty = 150 s.

po 150 s $x=150 \Rightarrow m = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot 150} = 4,9 \cdot 10^{-90} \text{ g}.$

Po 150 s zbude z 10 g látky X pouze $4,9 \cdot 10^{-90} \text{ g}.$

Poznámka: K příkladu je možné se vrátit ve fyzice. Náš matematický model s poločasem rozpadu uvažuje látku jako spojité prostředí obsahující „nekonečné“ množství částic. Tento předpoklad je velice dobře splněn pro „rozumné“ hmotnosti, ale rozhodně neplatí pro $4,9 \cdot 10^{-90} \text{ g}$, což je hmotnost o desítky řádů menší než hmotnost elementárních částic (hmotnost protonu $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ g}$).

Př. 6: Vysvětli, jak je možné, že ve vztahu odvozeném pro množství látky v předchozím příkladě se na rozdíl od předchozího příkladu s radonem ^{219}R nevyskytuje poločas rozpadu látky X.

Zkusíme okopírovat postup z příkladu s radonem.

Pro radon platí: poločas rozpadu $T = 4 \text{ s}$, počáteční množství $m_0 = 2 \text{ g}$.

Odvozený vzorec $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{T}}$.

Pro látku X platí: poločas rozpadu $T = 0,5 \text{ s}$, počáteční množství $m_0 = 10 \text{ g}$.

Dosadíme do vzorce odvozeného pro radon (ale platícího obecně):

$$m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{T}} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{0,5}} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{\frac{1}{2}}} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

V vzorci odvozeném pro látku X se poločas rozpadu vyskytuje také, ale v upravené hodnotě převráceného čísla. Vzorec $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{T}}$ platí obecně pro rozpad všech radioaktivních látek.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti sami řeší příklad 5 nápodobou s příkladem 4

(řešením je vztah $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{0,5}}$), pak pro ně předchozí příklad samozřejmě není žádným přínosem.

Př. 7: Intenzita rentgenových paprsků se snížila na polovinu při průchodu vrstvou olova o tloušťce 13,5 mm. Jak se změní intenzita paprsků, pokud projdou olověnou deskou o tloušťce 50 mm?

po 0 mm	1	
po 13,5 mm	$1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$	(intenzita se snížila na polovinu)
po $2 \cdot (13,5) \text{ mm}$	$1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	(intenzita se snížila na polovinu poloviny)

$$\text{po } 3 \cdot (13,5) \text{ mm} \quad \dots\dots 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\text{po } x \text{ mm} \quad \dots\dots 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13,5}$$

$$\text{Můžeme dosadit: po } 50 \text{ mm} \quad x = 50 \Rightarrow I = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13,5} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{50} = 0,077.$$

Po průchodu olověnou deskou o tloušťce 50 mm se intenzita paprsků sníží na 7,7% původní hodnoty.

Př. 8: Urči tloušťku olověné desky, která zeslabí intenzitu rentgenových paprsků na desetinu původní hodnoty. Využij údaje z předchozího příkladu.

$$\text{Pro intenzitu rentgenových paprsků při průchodu olovem platí: } I = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13,5}.$$

Pokud se paprsky zeslabí na desetinu původní intenzity platí: $I = \frac{1}{10} I_0$. Dosadíme:

$$I_0 \frac{1}{10} = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13,5}$$

$$\frac{1}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{13,5}$$

Dál nedokážeme úlohu řešit, neumíme shodit x z exponentu.

$$\text{Výsledek bychom mohli odhadnout: } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} > \frac{1}{10} > \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow \text{hodnota výrazu}$$

$\frac{x}{13,5}$ patří do intervalu (3; 4) a z ní můžeme přibližně určit x .

Přesně to však zatím neumíme. Potřebovali bychom vědět na co umocnit $\frac{1}{2}$, aby vyšla $\frac{1}{10}$.

Shrnutí: Pokud se při nějakém ději změní množství o stále stejný část aktuálního množství, jde o exponenciální závislost.