2.8.10 Rovnice s neznámou pod odmocninou a parametrem

Předpoklady: 2806, 2808

Budeme postupovat stejně jako v předchozích hodinách. Nejdříve si zopakujeme obecný postup při řešení rovnic s neznámou pod odmocninou a pak se pustíme na jednotlivé příklady.

postup při řešení rovnic s neznámou pod odmocninou:

- stanovíme podmínky pro výrazy pod odmocninami (pak je budeme kontrolovat)
- umocníme rovnici (v případě potřeby i vícekrát)
- vyřešíme rovnic bez odmocnin
- zkontrolujeme podmínky z prvního kroku
- provedeme zkoušku

Upozornění: $\sqrt{x^2} \neq x$, ale $\sqrt{x^2} = |x|$

Pedagogická poznámka: Zkontrolování podmínek z úvodu je nutné zopakovat. Při řešení rovnic bez parametrů tyto podmínky kontrolujeme mimoděk, ale z výrazu obsahujícího parametr není nesplnění podmínek příliš dobře vidět.

Př. 1: Vyřeš rovnici $\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+c}$.

Podmínky kvůli odmocninám:

- $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$
- $2x+c \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{c}{2}$

Obě podmínky budeme muset na závěr zkontrolovat.

$\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+c} \quad /^2$

$x+2 = 2x+c$

$2-c = x$ ještě musíme zkontrolovat zda vyhovuje podmínkám ze začátku:

$$x \geq -2$$
$$x = 2-c \geq -2$$
$$4 \geq c$$

$$x \geq -\frac{c}{2}$$
$$x = 2-c \geq -\frac{c}{2}$$
$$2 \geq \frac{c}{2}$$
$$4 \geq c$$

Z obou podmínek vyšlo to samé (není to náhoda)

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *c*:	**Řešení pro *x*:**
$c \leq 4$	$K = \{2-c\}$
$c > 4$	$K = \emptyset$

Př. 2: Vyřeš rovnici $\sqrt{x^2+3p^2}=x+p$.

Podmínky kvůli odmocninám:
$x^2+3p^2\geq 0$, součet druhých mocnin $\Rightarrow$ vždy nezáporný, platí vždy
Podmínku budeme muset na závěr zkontrolovat.
$\sqrt{x^2+3p^2}=x+p \quad /^2$
$x^2+3p^2=x^2+2px+p^2$
$2p^2=2px$, chceme dělit p $\Rightarrow$ musíme rozdělit výpočet:

$p=0$ $\Rightarrow$ nemůžeme dělit, ale můžeme dosadit
$2\cdot 0^2=2\cdot 0x$
$0=0x$ $\Rightarrow$ zdá se, že platí $K=R$, ale zbývá udělat zkoušku
$L=\sqrt{x^2+3p^2}=\sqrt{x^2+3\cdot 0^2}=\sqrt{x^2}=|x|$
$P=x+p=x+0=x$
$\Rightarrow$ zkouška vyjde, pokud bude platit $|x|=x$, což platí pokud $x\geq 0$ $\Rightarrow$ $K=\langle 0;\infty)$.

$p\neq 0$ $\Rightarrow$ můžeme dělit
$2p^2=2px \quad /:2p$
$x=p$
Opět musíme provést zkoušku:
$L=\sqrt{x^2+3p^2}=\sqrt{p^2+3p^2}=\sqrt{4p^2}=2|p|$
$P=x+p=p+p=2p$
zkouška vyjde, pokud bude platit $2|p|=2p$, což platí pokud $p\geq 0$.

$\Rightarrow$ $p>0$ $K=\{p\}$

$\Rightarrow$ $p<0$ $K=\emptyset$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p=0$	$K=\langle 0;\infty)$
$p>0$	$K=\{p\}$
$p<0$	$K=\emptyset$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad pro mě byl trochu zklamáním. Studenti jsou trochu překvapení tím, že musí pro větev $p=0$ dělat zkoušku, takže jim ji budete muset vnutit. Přesto mají obrovské problémy i se zkouškou v další části příkladu a pro velkou část z nich je problémem rozpoznat, že z nerovnosti $p>0$ neplyne $K=(0;\infty)$, ale to, že pro $p>0$ platí, řešení, které před chvílí spočítali pro x $K=\{p\}$. Zajímavou chybou, kterou studenti často dělají, je umocňování zkoušky. Když se pod odmocninou objeví písmenko, studenti mají pocit, že není možné se odmocniny zbavit jinak než umocněním (čímž zkouška ztrácí smysl).

Př. 3: Vyřeš rovnici $a\sqrt{y+a}=a^2$ s neznámou y a parametrem a.

$a\sqrt{y+a}=a^2$

pod odmocninou musí být nezáporné číslo $\Rightarrow$ $y+a\geq 0 \Rightarrow y\geq -a$ $\Rightarrow$ musíme zkontrolovat u výsledků.

Chceme vydělit rovnici a, ale nesmíme dělit nulou $\Rightarrow$ vyzkoušíme $a=0$.

Dosadíme $a=0$.

$a\sqrt{y+a}=a^2$

$0\sqrt{y+0}=0^2$

$0=0$

$K=R$, ale musím splnit podmínku: $y\geq -a=-0$

$a=0$ $\qquad K=\langle 0;\infty)$

Když $a\neq 0$ mohu dělit.

$\sqrt{y+a}=a \quad /^2$

$y+a=a^2$

$y=a^2-a$

$K=\{a^2-a\}$

musím zkontrolovat podmínku: $y\geq -a$. Dosadím za $y=a^2-a$.

$y=a^2-a\geq -a$

$a^2-a\geq -a$

$a^2\geq 0$ - tohle platí pro každé a $\Rightarrow$ podmínku splním vždy.

Umocňoval jsem $\Rightarrow$ musím udělat zkoušku.

$L=\sqrt{y+a}=\sqrt{a^2-a+a}=\sqrt{a^2}=|a|$

$P=a$

Kdy platí $L=|a|=a=P$?

$a>0$: platí $|a|=a$ $\Rightarrow$ $L=P$

Zkouška vyšla $K=\{a^2-a\}$.

$a<0$: platí $|a|=-a\neq a$ $\Rightarrow$ $L\neq P$ neplatí

Zkouška nevyšla $K=\emptyset$.

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *a*:	**Řešení pro *y*:**
$a=0$	$K=\langle 0;\infty)$
$a>0$	$K=\{a^2-a\}$
$a<0$	$K=\emptyset$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti umocňují rovnici ještě před vydělením *a*.

Pedagogická poznámka: Většina studentů nedokáže spočítat ani předchozí příklad, takže následující příklad zbývá pro ty opravdu nejlepší.

Př. 4: Vyřeš rovnici $\sqrt{x^2-1}=x-p$.

Podmínka kvůli odmocninám:

$x^2-1\geq 0$ zatím ji nebudeme řešit, uvidíme až vypočteme *x*.

$\sqrt{x^2-1}=x-p \qquad /^2$

$x^2-1=x^2-2px+p^2$

$2px=p^2+1$ chceme dělit p $\Rightarrow$ musíme rozdělit výpočet:

$p=0$ $\Rightarrow$ nemůžeme dělit, ale můžeme dosadit

$2\cdot 0\cdot x=0^2+1$

$0x=1 \Rightarrow K=\varnothing$

$p\neq 0$ $\Rightarrow$ můžeme dělit

$2px=p^2+1 \quad /:2p$

$x=\dfrac{p^2+1}{2p}$

Musíme zkontrolovat podmínku ze začátku příkladu:

$$x^2-1=\left(\frac{p^2+1}{2p}\right)^2-1=\frac{p^4+2p^2+1}{4p^2}-1=\frac{p^4+2p^2+1-4p^2}{4p^2}=\frac{p^4-2p^2+1}{4p^2}=\left(\frac{p^2-1}{2p}\right)^2\geq 0$$

platí vždy (druhá mocnina je nezáporná)

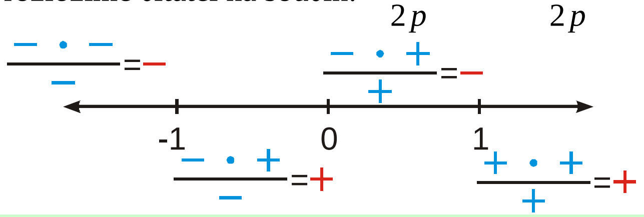
Ještě zkoušku:

$L=\sqrt{x^2-1}=x^2-1=\sqrt{\left(\frac{p^2+1}{2p}\right)^2-1}=\sqrt{\left(\frac{p^2-1}{2p}\right)^2}=\left|\frac{p^2-1}{2p}\right|$ (už jsme to počítali při kontrole podmínky)

$$P=x-p=\frac{p^2+1}{2p}-p=\frac{p^2+1-2p^2}{2p}=\frac{p^2+1-2p^2}{2p}=\frac{1-p^2}{2p}=-\frac{p^2-1}{2p}$$

$\Rightarrow$ pokud má zkouška vyjít musí platit: $\left|\frac{p^2-1}{2p}\right|=-\frac{p^2-1}{2p}$ $\Rightarrow$ číslo uvnitř absolutní hodnoty musí být záporné nebo nula $\Rightarrow$ nerovnice $\frac{p^2-1}{2p}\leq 0$

rozložíme čitatel na součin: $\frac{p^2-1}{2p}=\frac{(p-1)(p+1)}{2p}\leq 0$ $\Rightarrow$ nerovnice v součinovém tvaru:



$p\in(-\infty;-1\rangle\cup(0;1\rangle$ $\Rightarrow$ zkouška vychází $\Rightarrow$ $K=\left\{\frac{p^2+1}{2p}\right\}$

$p\in(-1;0)\cup(1;\infty)$ $\Rightarrow$ zkouška nevychází $\Rightarrow$ $K=\varnothing$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *c*:	**Řešení pro *x*:**
$p\in(-1;0\rangle\cup(1;\infty)$	$K=\varnothing$

$p \in (-\infty; -1\rangle \cup (0; 1\rangle$ $K = \left\{ \frac{p^2+1}{2p} \right\}$

Př. 5: Petáková:
strana 21/cvičení 6 b) d)

Shrnutí: Při řešení rovnic s odmocninou a parametrem musíme dodržet postup, kontrolovat všechny podmínky a provádět zkoušky pro všechna získaná řešení.