2.8.9 Parametrické rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Předpoklady: 2410, 2411, 2806

Pedagogická poznámka: Opět si napíšeme na začátku hodiny na tabuli jednotlivé kroky postupu při řešení rovnic (nerovnic) s absolutní hodnotou a při řešení příkladů v případě, že se studenti ztratí na tento postup odkazuji.

Postup řešení rovnic (nerovnic) s absolutní hodnotou:

- zbavíme se absolutní hodnoty podle znaménka výrazu uvnitř a tím rozdělíme výpočet na dvě cesty
- spočteme rovnice (nerovnice) v každé z cest
- zkontrolujeme zda výsledek patří mezi čísla, se kterými jsme v dané cestě počítali
- výsledky, které prošly kontrolou v předchozím kroku, dáme dohromady

Př. 1: Vyřeš rovnici $|x-3| = c-1$ s neznámou *x* a parametrem *c*.

$|x-3| = c-1$ - rovnice obsahuje absolutní hodnotu $\Rightarrow$ musíme ji odstranit, rozdělíme na dvě cesty podle hodnot *x*. Záleží na znaménku výrazu $(x-3)$.

$(x-3) \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$ uvnitř absolutní hodnoty kladné číslo $\Rightarrow$ $\|x-3\| = x-3$ $x-3 = c-1$ $x = c+2$ Počítáme jen s $x \geq 3$ $\Rightarrow$, pokud je číslo $x = c+2$ řešením musí platit $x = c+2 \geq 3$ $c+2 \geq 3$	$(x-3) \leq 0 \Rightarrow x \leq 3$ uvnitř absolutní hodnoty záporné číslo $\Rightarrow$ $\|x-3\| = -x+3$ $3-x = c-1$ $x = 4-c$ Počítáme jen s $x \leq 3$ $\Rightarrow$, pokud je číslo $x = 4-c$ řešením musí platit $x = 4-c \leq 3$ $4-c \leq 3$
$c \geq 1$ Kořen $x = c+2$ je mezi čísly, se kterými jsme počítali $K_1 = \{c+2\}$	$1 \leq c$ Kořen $x = 4-c$ je mezi čísly, se kterými jsme počítali $K_2 = \{4-c\}$
$c < 1$ Kořen $x = c+2$ není mezi čísly, se kterými jsme počítali. $K = \emptyset$	$c < 1$ Kořen $x = 4-c$ není mezi čísly, se kterými jsme počítali. $K = \emptyset$

Nedělili jsem výpočet podle různých hodnot *c*, ale rozdělili jsme všechna možná *x* na dvě části a pro každou část jsem to spočítali $\Rightarrow$ celkový výsledek je sjednocení obou řešení
$K = K_1 \cup K_2 = \{c+2; 4-c\}$

Ještě zkontrolujeme hraniční hodnotu *c*. Pro $c = 1$ platí:
$c+2 = 1+2 = 3$
$4-c = 4-1 = 3$
Oba kořeny se rovnají.

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *c*:	**Řešení pro *x*:**
$c \in \langle 1; \infty)$	$K = \{c+2; 4-c\}$

$c = 1$	$K = \{3\}$
$c \in (-\infty; 1)$	$K = \emptyset$

Pedagogická poznámka: Studenti poměrně rychle a snadno spočítají kořeny, ale je těžké je donutit k tomu, aby zkontrolovali, zda patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. Většinou po chvíli spočítám jednu z cest a až druhou nechám na nich.

Některé příklady můžeme řešit také pomocí definice absolutní hodnoty: absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel se rovná vzdálenosti obrazů těchto čísel na číselné ose.

Př. 2: Vyřeš rovnici $|x-3| = c-1$ s neznámou x a parametrem c použitím definice absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel.

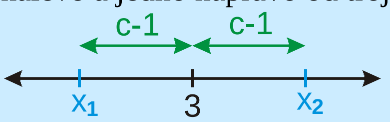
$|x-3| = c-1$ - hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obrazu čísla 3 na ose vzdáleny o $c-1$.

$\Rightarrow$ výraz $c-1$ znamená vzdálenost $\Rightarrow$ dělíme podle hodnot parametru c:

$c-1<0 \Rightarrow c<1$ - vzdálenost je záporná – nesmysl $\Rightarrow$ $K = \emptyset$

$c-1=0 \Rightarrow c=1$ - vzdálenost je nulová $\Rightarrow$ jediné číslo jehož obraz má nulovou vzdálenost od obrazu čísla 3 je opět číslo 3 $\Rightarrow$ $K = \{3\}$.

$c-1>0 \Rightarrow c>1$ - vzdálenost je větší než nula $\Rightarrow$ budou existovat dvě taková čísla jedno nalevo a jedno napravo od trojky. Velikosti najdeme z obrázku:



$x_1 = 3-(c-1) = 3-c+1 = 4-c$

$x_2 = 3+(c-1) = 2+c$

$K = \{c+2; 4-c\}$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru c:	**Řešení pro x:**
$c \in (1; \infty)$	$K = \{c+2; 4-c\}$
$c = 1$	$K = \{3\}$
$c \in (-\infty; 1)$	$K = \emptyset$

Stejný výsledek jako v předchozím příkladě (jinak by to ani nešlo).

Pedagogická poznámka: Hodně studentů má problémy s výpočtem řešení pomocí vzdálenosti $c-1$. Snažím se, aby si to v případě problémů vyzkoušeli na konkrétních číslech a pak postup napodobili.

Př. 3: Vyřeš nerovnici $|x-p| = 2$ s neznámou x a parametrem p metodou dělení definičního oboru.

$|x-p| = 2$ - nerovnice obsahuje absolutní hodnotu $\Rightarrow$ musíme ji odstranit, rozdělíme na dvě cesty podle hodnot x. Záleží na znaménku výrazu $(x-p)$.

$x-p<0 \Rightarrow x<p \Rightarrow x \in (-\infty; p\rangle$
uvnitř absolutní hodnoty záporné číslo $\Rightarrow$
$|x-p| = -x+p$
$|x-p| = 2$
$-x+p=2$
$x=p-2$
Musíme zkontrolovat zda $x=p-2$ je mezi čísly, se kterými počítáme ($x<p$) -
$x=p-2<p$ - počítáme s ním $\Rightarrow$
$K_1 = \{p-2\}$

$x-p>0 \Rightarrow x>p$
uvnitř absolutní hodnoty kladné číslo $\Rightarrow$
$|x-p| = x-p$
$|x-p| = 2$
$x-p=2$
$x=p+2$
Musíme zkontrolovat zda $x=p+2$ je mezi čísly, se kterými počítáme ($x>p$) -
$x=p+2>p$ - počítáme s ním $\Rightarrow$
$K_2 = \{p+2\}$

Nedělili jsem výpočet podle různých hodnot *p*, ale rozdělili jsem všechna možná *x* na dvě části a pro každou část jsme to spočítali $\Rightarrow$ celkový výsledek je sjednocení obou řešení.
$K = K_1 \cup K_2 = \{p-2; p+2\}$

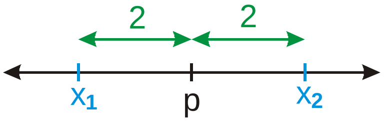
Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p \in R$	$K = \{p-2; p+2\}$

Pedagogická poznámka: Stejně jako v minulé hodině mají někteří problém s tím, že se řešení nevětví podle parametru.

Př. 4: Vyřeš rovnici $|x-p| = 2$ s neznámou *x* a parametrem *p* použitím definice absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel.

$|x-p| = 2$ - hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obrazu čísla *p* vzdáleny o 2.



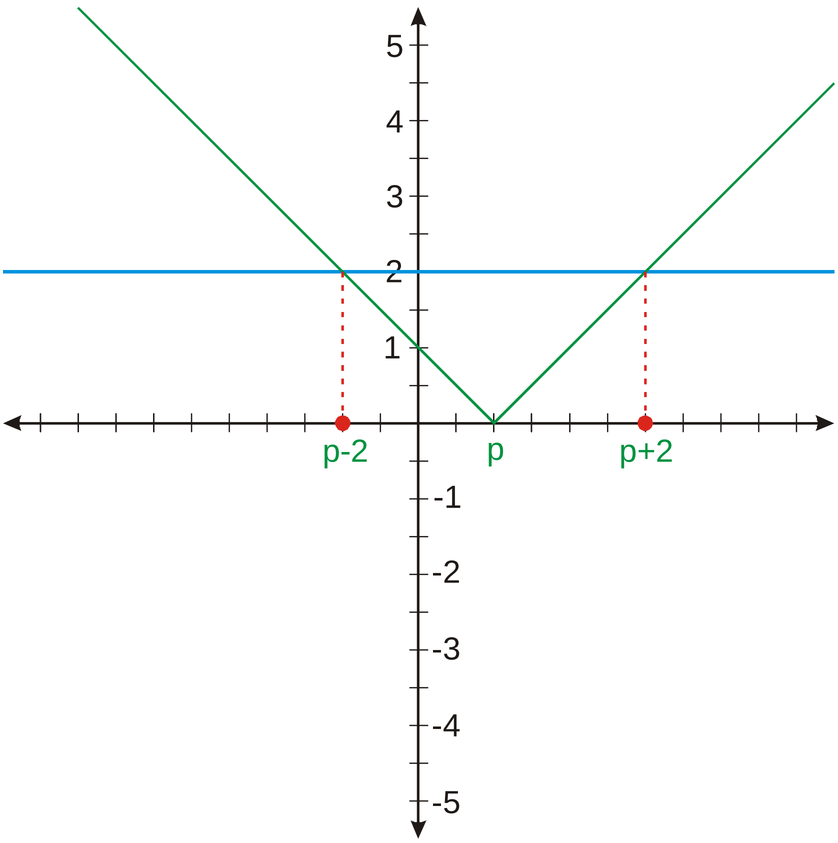
$x_1 = p-2$
$x_2 = p+2$
$K = \{p-2; p+2\}$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p \in R$	$K = \{p-2; p+2\}$

Př. 5: Vyřeš rovnici $|x-p| = 2$ s neznámou *x* a parametrem *p* graficky.

Levá strana – funkce $y = |x-p|$ $\Rightarrow$ funkce absolutní hodnota, posunutá po ose *x* o *p*.
Pravá strana – funkce $y = 2$.



$K = \{p-2; p+2\}$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p \in R$	$K = \{p-2; p+2\}$

Př. 6: Vyřeš nerovnici $|x+c| \le 3$ s neznámou x a parametrem c.

$|x+c| \le 3$ - rovnice obsahuje absolutní hodnotu $\Rightarrow$ musíme ji odstranit, rozdělíme na dvě cesty podle hodnot x. Záleží na znaménku výrazu $(x+c)$.

$(x+c) \le 0 \Rightarrow x \le -c$	$(x+c) \ge 0 \Rightarrow x \ge -c$
uvnitř absolutní hodnoty záporné číslo $\Rightarrow$	uvnitř absolutní hodnoty kladné číslo $\Rightarrow$
$\|x+c\| = -x-c$	$\|x+c\| = x+c$
$-x-c \le 3$	$x+c \le 3$
$-c-3 \le x$	$x \le -c+3$
Zdá se, že $x \in \langle -3-c; \infty)$	Zdá se, že $x \in (-\infty; -c+3\rangle$
Počítáme jen s $x \le -c$	Počítáme jen s $x \ge -c$
číslo $-3-c$ je menší než $-c$ $\Rightarrow$ z intervalu	číslo $-c+3$ je větší než číslo $-c$ $\Rightarrow$
něco zbylo $K_1 = \langle -3-c; -c\rangle$	z intervalu něco zbylo $K_2 = \langle -c; -c+3\rangle$

Nedělil jsem výpočet podle různých hodnot c, ale rozdělil jsem všechna možná x na dvě části a pro každou část jsem to spočítal $\Rightarrow$ celkový výsledek je sjednocení obou řešení

$K = K_1 \cup K_2 = \langle -3-c; -c\rangle \cup \langle -c; -c+3\rangle = \langle -3-c; -c+3\rangle$

Závěrečný přehled:

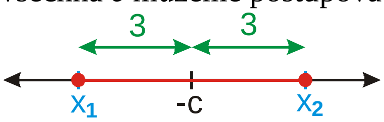
Hodnoty parametru *c*: $c \in R$

Řešení pro *x*: $K = \langle -3-c; -c+3 \rangle$

Př. 7: Vyřeš rovnici $|x+c| \le 3$ s neznámou *x* a parametrem *c* použitím definice absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel.

$|x+c| = |x-(-c)| \le 3$ - hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obrazu $-c$ vzdáleny o 3 nebo méně.

parametr *c* představuje číslo, od kterého měříme vzdálenost, na jeho hodnotě nezáleží $\Rightarrow$ pro všechna *c* můžeme postupovat stejně



$x_1 = -c-3$

$x_2 = -c+3$

$K = \langle -3-c; -c+3 \rangle$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *c*: $c \in R$

Řešení pro *x*: $K = \langle -3-c; -c+3 \rangle$

Př. 8: Petáková:
strana 21/cvičení 7 b) c) d)

Shrnutí: