2.8.5 Lineární nerovnice s parametrem

Předpoklady: 2208, 2802

Pedagogická poznámka: Pokud v tom necháte studenty vykoupat (což je, zdá se, jediné rozumné řešení) zabere tato látka tak jednu a půl vyučovací hodiny (první hodinu příklady 1.-4., polovinu druhé příklady 5. a 6.).
Při samostatné práci studentů si určitě všimnete, že naprostá většina problémů pramení ze špatné orientace, neuplatňování základních pravidel a nepozornosti. Nic z toho jim výklad u tabule nemůže poskytnout.

V čem je řešení nerovnic podobné řešení rovnic?

- Nesmíme vydělit nerovnici nulou.

V čem je řešení nerovnic jiné než řešení rovnic?

- Pokud dělíme záporným číslem, musíme obrátit znaménko.

$\Rightarrow$ **při dělení výrazem, který obsahuje parametr, musíme rozlišovat u hodnot výrazu nulu, kladnou hodnotu a zápornou hodnotu** $\Rightarrow$ typicky budeme větvit do tří větví

Pedagogická poznámka: Úvodní přehled sestavíme společně se studenty s tím, že v něm je obsaženo vše potřebné k správnému vyřešení úloh této hodiny.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $2x+b>0$ s neznámou x a parametrem b.

$2x+b>0 \quad /-b$ odečíst b můžeme vždy

$2x>-b \quad /:2$

$x>-\frac{b}{2}$ $\quad K=\left(-\frac{b}{2};\infty\right)$

Hodnoty parametru b:	**Řešení pro x:**
$b\in R$	$K=\left(-\frac{b}{2};\infty\right)$

Pedagogická poznámka: Skutečnost, že závěrečný přehled obsahuje pouze jediný řádek, činí předchozí příklad pro naprostou většinu studentů neřešitelným. Jediný řádek se jim zdá příliš málo (všechny ostatní příklady jich přece mají víc a ještě jsme očekávali, že se větvení zesložití) a tak závěrečný přehled většinou nenapíší.

Př. 2: Vyřeš nerovnici $ax-2>0$ s neznámou x a parametrem a.

$ax-2>0$

$ax>2$

Chceme vydělit rovnici výrazem a, ale jednak nesmíme dělit nulou a jednak musíme znát znaménko výrazu, kterým dělíme (abychom věděli zda obrátit nebo zachovat nerovnost)

$\Rightarrow$ **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe)

$a>0$, můžeme vydělit nerovnici, dělíme kladným číslem $\Rightarrow$ zachováváme nerovnost:

$ax>2 \quad /:a$

$x > \frac{2}{a}$ $K = \left(\frac{2}{a}, \infty\right)$

$a = 0$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow$
$ax > 2$
$0x > 2$
$0 > 2$ $\Rightarrow$ nevyjde nikdy $\Rightarrow$ $K = \emptyset$

$a < 0$, můžeme vydělit nerovnici, dělíme záporným číslem $\Rightarrow$ obracíme nerovnost:
$ax > 2$ $/ : a$
$x < \frac{2}{a}$ $K = \left(-\infty, \frac{2}{a}\right)$

Závěrečný přehled:

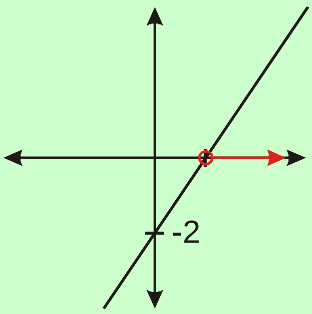
Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$a > 0$	$K = \left(\frac{2}{a}, \infty\right)$
$a = 0$	$K = \emptyset$
$a < 0$	$K = \left(-\infty, \frac{2}{a}\right)$

Pedagogická poznámka: Nezanedbatelná část studentů před dělením rozdělí výpočet pouze na dvě větve ($a = 0, a \neq 0$). Ptám se jich, jaký vlastně mělo význam si na začátku hodiny psát, co nás čeká a jak budeme postupovat.

Př. 3: Vyřeš graficky nerovnici $ax - 2 > 0$ s neznámou x a parametrem *a*.

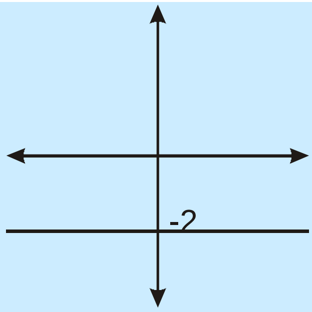
Levá strana – funkce $y = ax - 2$ - přímka (lineární funkce), procházející bodem $[0; -2]$ (hodnota pro $x = 0$ je –2). Směr přímky závisí na hodnotě parametru *a*.
Pravá strana – 0 – budeme se zajímat, která část grafu levé strany je nad nebo pod osou *x*
$\Rightarrow$ **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe)

$a > 0$, funkce $y = ax - 2$ je rostoucí:



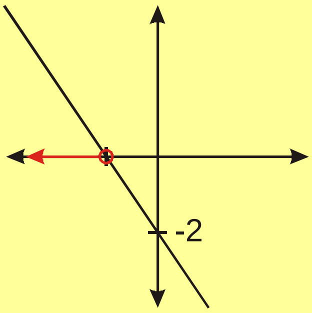
$\Rightarrow K = \left(\frac{2}{a}, \infty\right)$

$a = 0$ funkce $y = ax - 2$ je konstantní:



$\Rightarrow K = \emptyset$

funkce $y = ax - 2$ je klesající::



$\Rightarrow K = \left(-\infty, \dfrac{2}{a}\right)$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$a > 0$	$K = \left(\dfrac{2}{a}, \infty\right)$
$a = 0$	$K = \emptyset$
$a < 0$	$K = \left(-\infty, \dfrac{2}{a}\right)$

Pedagogická poznámka: Nakreslit graf první funkce je vzhledem k neurčitosti zadání pro hodně studentů příliš velké sousto. Po menším čekání tak řešíme bod a) společně a samostatně studenti dopočítávají až zbytek.

Př. 4: Vyřeš nerovnici $ax + b \leq 0$ s neznámou *x* a parametry *a*, *b*. Každou větev řešení zkontroluj pomocí grafického řešení.

$ax + b \leq 0$

$ax \leq -b$

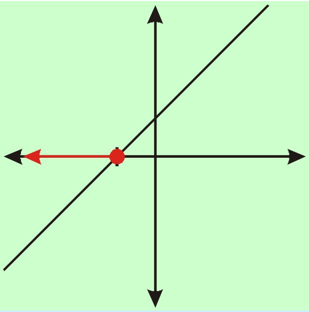
Chceme vydělit rovnici výrazem *a*, ale jednak nesmíme dělit nulou a jednak musíme znát znaménko výrazu, kterým dělíme (abychom věděli zda obrátit nebo zachovat nerovnost)

$\Rightarrow$ **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe)

$a > 0$, můžeme vydělit nerovnici, dělíme kladným číslem $\Rightarrow$ nerovnost zachováváme:

$ax \leq -b \quad / : a$

$x \leq -\dfrac{b}{a} \qquad K = \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right\rangle$



$a = 0$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow$

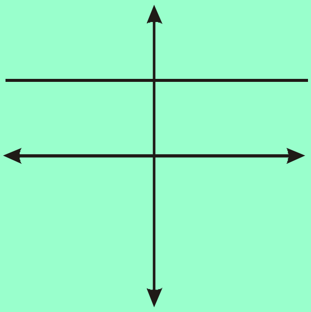
$ax \le -b$

$0x \le -b$

$0 \le -b$ $\Rightarrow$ záleží na hodnotě b $\Rightarrow$ **opět rozvětvujeme podle hodnoty *b***

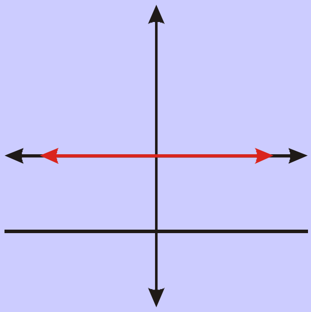
$b > 0 \Rightarrow -b < 0$ $\Rightarrow$ získáváme nerovnici

$0 \le \textit{záporné číslo}$ $\Rightarrow$ $K = \emptyset$



$b \le 0 \Rightarrow -b \ge 0$ $\Rightarrow$ získávám nerovnici

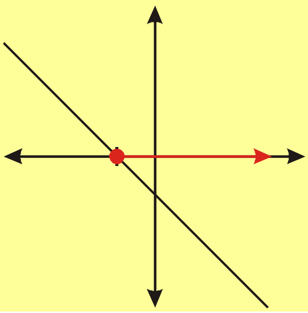
$0 \le \textit{nezáporné číslo}$ $\Rightarrow$ $K = R$



$a < 0$, můžeme vydělit nerovnici, dělíme záporným číslem $\Rightarrow$ nerovnost obracíme:

$ax \le -b \quad / : a$

$x \ge -\frac{b}{a}$ $\qquad K = \left\langle -\frac{b}{a}; \infty \right)$



Závěrečný přehled:

Hodnoty parametrů *a,b*:	**Řešení pro *x*:**
$a > 0,\ b \in R$	$K = \left(-\infty; -\frac{b}{a} \right\rangle$
$a = 0,\ b \in (0; \infty)$	$K = \emptyset$
$a = 0,\ b \in (-\infty; 0\rangle$	$K = R$
$a < 0,\ b \in R$	$K = \left\langle -\frac{b}{a}; \infty \right)$

Pedagogická poznámka: Téměř všichni selžou u prostřední větve s $a = 0$. Nejčastěji bez nějakého důvodu napíší automaticky $K = \emptyset$, pak po nich chci, aby přestali hádat a začali počítat. Další se pak spletou až na samém konci, kdy si neuvědomí, že podmínka patří k *b* a my hledáme řešení pro *x* a tak omezení volby *b* neznamená omezení volby *x*.

Př. 5: Vyřeš nerovnici $px - 2 \geq 2x - p$ s neznámou *x* a parametrem *p*.

$px - 2 \geq 2x - p$
$px - 2x \geq 2 - p$
$x(p-2) \geq 2 - p$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(p-2)$, ale jednak nesmíme dělit nulou a jednak musíme znát znaménko výrazu, kterým dělíme (abych věděli zda obrátit nebo zachovat nerovnost). $\Rightarrow$ Zjistíme, kdy je výraz $(p-2)$ roven nule: $p - 2 = 0 \Rightarrow p = 2$

$\Rightarrow$ **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe)

$p > 2$, můžeme vydělit nerovnici, dělíme kladným číslem $\Rightarrow$ nerovnost zachováváme:

$x(p-2) \geq 2 - p \quad / : (p-2)$

$x \geq \frac{2-p}{p-2}$

$x \geq -1 \qquad K = \langle -1, \infty)$

$p = 2$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow$

$x(p-2) \geq 2 - p$
$x(2-2) \geq 2 - 2$
$0x \geq 0$
$0 \geq 0 \quad \Rightarrow$ vyjde vždy $\Rightarrow K = R$

$p < 2$, můžeme vydělit nerovnici, dělíme záporným číslem $\Rightarrow$ nerovnost obracíme:

$x(p-2) \geq 2 - p \quad / : (p-2)$

$x \leq \frac{2-p}{p-2}$

$x \leq -1 \qquad K = (-\infty, -1\rangle$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p > 2$	$K = \langle -1, \infty)$
$p = 2$	$K = R$
$p < 2$	$K = (-\infty, -1\rangle$

Pedagogická poznámka: Příklad nečiní studentům větší problémy, pouze Ti slabší zase automaticky dělí intervaly podle nuly ne dvojky na $p > 0$, $p = 2$ a $p < 0$.

Př. 6: Vyřeš nerovnici $\frac{1}{x-p} \leq 1$ s neznámou *x* a parametrem *p*.

$\frac{1}{x-p} \leq 1$ - nerovnice obsahuje zlomek $\Rightarrow$ je třeba podmínka $x-p \neq 0 \Rightarrow x \neq p$ - teď můžeme násobit výrazem $(x-p)$, může být kladný i záporný $\Rightarrow$ rozdělíme na dvě větve stejně bychom dělili na dvě větve nerovnici $\frac{1}{x-\sqrt{2}} \leq 1$ $\Rightarrow$ tohle je dělení výpočtu podle hodnot *x*, ne podle hodnot parametru (jiný typ dělení než jsme u parametrických nerovnic dosud používali) $\Rightarrow$ **tohle dělení se neprojeví v závěrečném přehledu, výsledky z obou větví budeme muset sjednotit**

$x-p<0 \Rightarrow x<p$ - násobíme záporným číslem $\Rightarrow$ obracíme nerovnost $\frac{1}{x-p} \leq 1 \quad /\cdot(x-p)$ $1 \geq x-p$ $1+p \geq x$ $\Rightarrow$ vypadá to na interval $(-\infty; p+1\rangle$, ale počítáme jen s čísly $x<p$ $\Rightarrow$ $K_1=(-\infty; p)$	$x-p>0 \Rightarrow x>p$ - násobíme kladným číslem $\Rightarrow$ zachováváme nerovnost $\frac{1}{x-p} \leq 1 \quad /\cdot(x-p)$ $1 \leq x-p$ $1+p \leq x$ $\Rightarrow$ vypadá to na interval $\langle p+1;\infty)$, počítáme jen s čísly $x>p$ a taková jsou v intervalu $\langle p+1;\infty)$ všechna $\Rightarrow$ $K_2=\langle 1+p,\infty)$

Nedělili jsem výpočet podle různých hodnot *p*, ale rozdělili jsme všechna možná *x* na dvě části a pro každou část jsem to spočítali $\Rightarrow$ celkový výsledek je sjednocení obou řešení.

$K=K_1 \cup K_2=(-\infty, p) \cup \langle p+1,\infty)$

Závěrečný přehled:

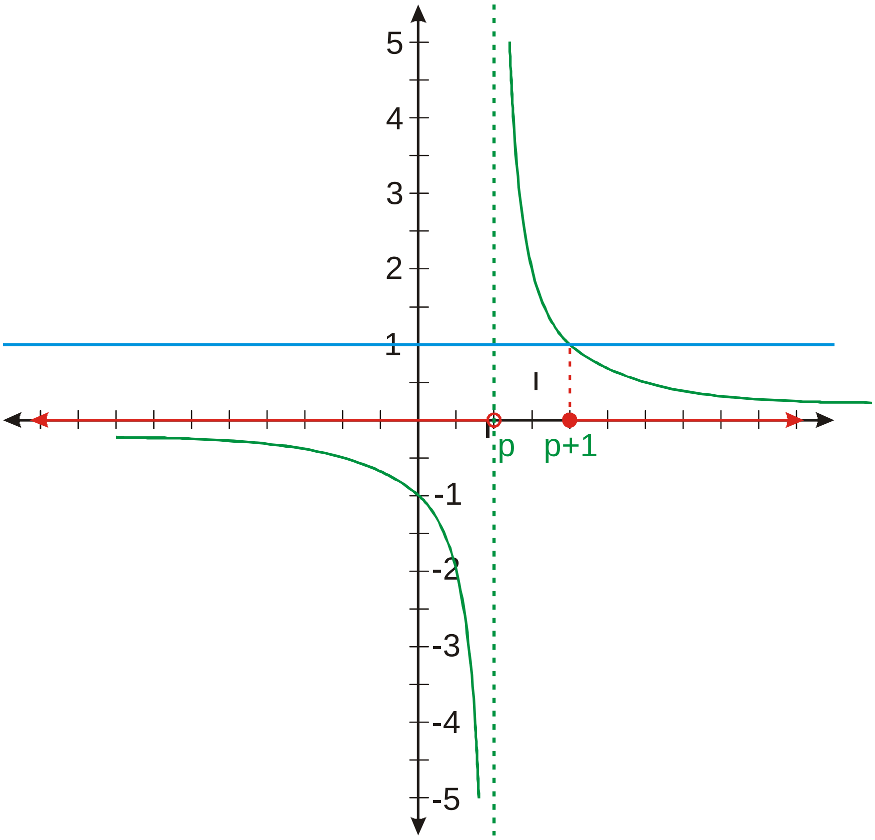
Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p \in R$	$K=(-\infty, p) \cup \langle p+1,\infty)$

Pedagogická poznámka: Diskuse o vzniku konečného výsledku sjednocením je důležitá, přesto se objeví studenti, kteří nebudou mít v situaci zcela jasno. Na druhou stranu jde o příklad poměrně extrémní na představivost a je velmi málo pravděpodobné, že by se s ním ještě někdy setkali.

Př. 7: Vyřeš graficky nerovnici $\frac{1}{x-p} \leq 1$ s neznámou *x* a parametrem *p*.

Levá strana – funkce $y=\frac{1}{x-p}$ - lineární lomená funkce, posunutá po ose *x* o *p*.

Pravá strana – funkce $y=1$.



$K = (-\infty, p) \cup \langle p+1, \infty)$

Pedagogická poznámka: Teprve z grafického řešení někteří studenti pochopí, jak se příklad vlastně měl řešit.

Shrnutí: Při řešení nerovnic s parametrem musíme při dělení s výrazem obsahujícím parametr dávat pozor i na znaménko tohoto výrazu.