

2.8.4 Soustavy lineárních rovnic s parametrem

Předpoklady: 2803

Pedagogická poznámka: Opět je potřeba přesvědčovat studenty, že nejde o nic nového. Řešíme soustavy zcela běžně, pouze při nebezpečných operacích musíme psát podmínky a rozvětňovat řešení.

Pedagogická poznámka: U všech následujících hodin, které se zabývají řešením příkladů s parametry postupujeme stejně – na začátku si rozebereme, jakým způsobem daný typ rovnic řešíme, napíšeme si na tabuli body tohoto postupu a pak studenti příklady samostatně řeší. Nejčastější chyby (podle frekvence výskytu): nedodržení postupu (studenti většinou skončí dříve, jakmile získají řešení čehokoliv, co obsahuje znak =) ztráta orientace (studenti zapomenou, že řeší rovnici pro x , a začnou řešit nerovnice nebo rovnice pro parametr) opomenutí nebezpečné operace (v naprosté většině případů dělení), které vede k rozštěpení postupu Přesto jsem přesvědčený, že v podstatě nemá cenu jakýkoliv z příkladů řešit na tabuli, protože ke správnému řešení studenti nepotřebují žádné neznámé informace a naprostá většina problémů je schována v nepozornosti, špatném zápisu nebo nedůslednosti. V žádné z těchto dovedností se nezlepší, když příklady opíšou z tabule. Po napsání úvodního přehledu studenti samostatně řeší příklady, já se je snažím kontrolovat a pomáhat jim, krizová místa si promítneme a rozebereme na zdi. Protože zadání příkladů je krátké, napíšu všechny na tabuli, aby nikoho nezdržovalo, když si necháme něco promítnutého na zdi.

Řešení soustavy rovnic

- dosazování, sčítáním rovnic nebo pomocí jiné metody získáme rovnici o jediné neznámé
- rovnici vyřešíme
- dopočítáme hodnoty zbývajících proměnné (zbývajících proměnných)

řešením není jediné číslo, ale uspořádaná dvojice (trojice...) čísel

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 6 \\ px + 4y &= 2p \end{aligned}$$
 s neznámými x a y a parametrem p .

$$3x + 2y = 6$$

$$px + 4y = 2p$$

Řešíme jako normální soustavu \Rightarrow vyjádříme z první rovnice y a dosadíme do druhé. Ze soustavy tak uděláme normální rovnici s parametrem.

$$3x + 2y = 6 \Rightarrow y = 3 - \frac{3x}{2}$$

$$px + 4\left(3 - \frac{3}{2}x\right) = 2p$$

$$px + 12 - 6x = 2p$$

$$px - 6x = 2p - 12$$

$$x(p - 6) = 2(p - 6)$$

Chceme vydělit rovnicí výrazem $(p - 6)$ a nesmíme dělit nulou. \Rightarrow Kdy je výraz $(p - 6)$ roven nule: $(p - 6) = 0 \Rightarrow p = 6$. Pokud chceme dělit, musíme 6 vyloučit

\Rightarrow **rozvětvení**

$p \neq 6$, můžeme vydělit rovnicí výrazem $(p - 6)$, protože se určitě nebude rovnat nule:

$$x(p - 6) = 2(p - 6) \quad / : (p - 6)$$

$$x = \frac{2(p - 6)}{p - 6} = 2$$

Ještě musíme dopočítat y :

$$y = 3 - \frac{3x}{2} = 3 - \frac{3 \cdot 2}{2} = 0 \quad K = \{[2; 0]\}$$

$p = 6$ - nemůžeme dělit \Rightarrow dosadíme

$$x(p - 6) = 2(p - 6)$$

$$x(6 - 6) = 2(6 - 6)$$

$x \cdot 0 = 0$ rovnice je splněna pro každé reálné $x \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

ještě dopočítat y : $y = 3 - \frac{3x}{2}$

$$\Rightarrow K = \left\{ \left[x; 3 - \frac{3x}{2} \right], x \in \mathbb{R} \right\}$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :

Řešení pro $[x; y]$:

$$p \neq 6$$

$$K = \{[2; 0]\}$$

$$p = 6$$

$$K = \left\{ \left[x; 3 - \frac{3x}{2} \right], x \in \mathbb{R} \right\}$$

Pedagogická poznámka: Značné procento studentů spočte x v obou větvích a zapomene dopočítat y . Připomínám jim, že zapomněli provést poslední krok postupu, který jsme napsali na začátku hodiny. Tento typ chyby bude této i dalších hodinách nejčastější.

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ (a + 1)x - 2y = 4 \end{cases}$$
 s neznámými x a y a parametrem a .

$$2x + y = 3$$

$$(a + 1)x - 2y = 4$$

Řešíme jako normální soustavu \Rightarrow vyjádříme z první rovnice y a dosadíme do druhé. Ze soustavy uděláme normální rovnici s parametrem.

$$2x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 2x$$

$$(a + 1)x - 2(3 - 2x) = 4$$

$$ax + x - 6 + 4x = 4$$

$$ax + 5x = 10$$

$$x(a + 5) = 10$$

Chceme vydělit rovnicí výrazem $(a + 5)$ a nesmíme dělit nulou. \Rightarrow Kdy je výraz $(a + 5)$ roven nule: $(a + 5) = 0 \Rightarrow a = -5$. Pokud chceme dělit, musíme -5 vyloučit

\Rightarrow **rozvětvení**

$a \neq -5$, můžeme vydělit rovnicí výrazem

$a = -5$ - nemůžeme dělit, dosadíme

$(a+5)$, protože se určitě nebude rovnat nule:

$$x(a+5) = 10 \quad / : (a+5)$$

$$x = \frac{10}{a+5}$$

Ještě musíme dopočítat y :

$$y = 3 - 2x = 3 - 2\left(\frac{10}{a+5}\right) = \frac{3a+15-20}{a+5} = \frac{3a-5}{a+5}$$

$$K = \left\{ \left[\frac{10}{a+5}; \frac{3a-5}{a+5} \right] \right\}$$

$$x(a+5) = 10$$

$$x(-5+5) = 10$$

$$x \cdot 0 = 10$$

rovnice není splněna pro žádné reálné $x \Rightarrow$
nenajdeme vyhovující x , nemá cenu hledat
ani $y \Rightarrow K = \emptyset$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :

Řešení pro $[x; y]$:

$$a \neq -5$$

$$K = \left\{ \left[\frac{10}{a+5}; \frac{3a-5}{a+5} \right] \right\}$$

$$a = -5$$

$$K = \emptyset$$

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $\frac{x-2a}{y} = 2$ $\frac{y+a}{x} = \frac{1}{a}$ s neznámými x a y a parametrem a .

$$\frac{x-2a}{y} = 2 \qquad \frac{y+a}{x} = \frac{1}{a}$$

Výrazy v rovnicích obsahují zlomky \Rightarrow musíme napsat podmínky.

$$y \neq 0, \quad x \neq 0, \quad a \neq 0.$$

Význam prvních dvou podmínek zatím neznáme, záleží na výsledcích.

Třetí podmínka $a \neq 0$ znamená, že pro $a = 0$, rovnici nebudeme vůbec řešit a tedy $K = \emptyset$.

Rovnice vynásobíme a upravíme:

$$\frac{x-2a}{y} = 2 \quad / \cdot y \qquad \frac{y+a}{x} = \frac{1}{a} \quad / xa$$

$$x-2a = 2y$$

$a(y+a) = x$ - obou rovnic vyjádříme x a použijeme srovnávací metodu.

$$x = 2y + 2a$$

$$x = ay + a^2$$

$$ay + a^2 = 2y + 2a$$

$$ay - 2y = 2a - a^2$$

$$y(a-2) = a(2-a)$$

Chceme vydělit rovnicí výrazem $(a-2)$ a nesmíme dělit nulou. \Rightarrow Kdy je výraz $(a-2)$

roven nule: $(a-2) = 0 \Rightarrow a = 2$. Pokud chceme dělit, musíme 2 vyloučit

\Rightarrow **rozvětvení**

$a \neq 2$, můžeme vydělit rovnicí výrazem

$(a+5)$, protože se určitě nebude rovnat nule:

$$y(a-2) = a(2-a) \quad / : (a-2)$$

$a = 2$ - nemůžeme dělit, dosadíme

$$y(2-2) = 2(2-2)$$

$y \cdot 0 = 0$ rovnice je splněna pro každé reálné y

Musíme dopočítat x :

$$y = \frac{a(2-a)}{a-2} = -a$$

Ještě musíme dopočítat x :

$$x = 2y + 2a = 2(-a) + 2a = 0$$

$$K = \{[0; -a]\}$$

Kontrola podmínek:

Podmínka: $y \neq 0$: $y = 0 = -a \Rightarrow a = 0$ - to už jsme vyloučili na začátku

Podmínka: $x \neq 0$ - to vylučuje všechna získaná řešení, protože ve všech máme $x = 0 \Rightarrow K = \emptyset$

$$x = 2y + 2a = 2y + 2 \cdot 2 = 2y + 4 \Rightarrow$$

$$K = \{[2y + 4; y]; y \in R\}$$

Kontrola podmínek:

Podmínka: $y \neq 0$ - jasné $y \in R - \{0\}$

Podmínka: $x \neq 0$ - dopočteme z jakého y toto x vyrobíme a zakážeme ho:

$$x = 2y + 4 = 0$$

$$2y + 4 = 0$$

$$y = -2 \Rightarrow y \in R - \{-2; 0\}$$

$$K = \{[2y + 4; y]; y \in R - \{-2; 0\}\}$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :

$$a \in R - \{2\}$$

$$a = 2$$

Řešení pro $[x; y]$:

$$K = \emptyset$$

$$K = \{[2y + 4; y]; y \in R - \{-2; 0\}\}$$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu se opakuje situace z minulé hodiny, kde po dopočítání musíme zkontrolovat platnost podmínek. Kontrolu podmínek je dobré stihnout s celou třídou. Pokud studenti řeší příklad sami, mají velké problémy s tím, že podmínky z úvodu příkladu vyloučí řešení pro všechna a různá od nuly.

Př. 4: Petáková:

strana 21/cvičení 8 a) b)

strana 21/cvičení 9

strana 21/cvičení 10

Shrnutí: Při řešení soustav rovnic s parametrem postupujeme stejně jako při řešení obyčejných rovnic s parametrem.