2.8.2 Lineární rovnice s parametrem II

Předpoklady: 2801

Pedagogická poznámka: Zvládnutí zápisu a obecného postupu (dělení podle hodnot parametru) při řešení parametrických rovnic v této hodině je zásadní podmínkou několika následujících hodin. Proto by Ti, kteří příklady nestihnou a o hodině počítali s problémy, měli dopočítat hodinu doma.

Př. 1: Vyřeš rovnici $2xp + p(1-x) = 3p - 4 + 2x$ s neznámou x a parametrem p.

$2xp + p(1-x) = 3p - 4 + 2x$
$2xp - xp + p = 3p - 4 + 2x$
$xp + p = 2x - 4 + 3p$
$xp - 2x = 2p - 4$
$x(p-2) = 2p - 4$

Chceme vydělit rovnici výrazem $p-2$, což může být problém, protože se nesmí dělit nulou. $\Rightarrow$ Zjistíme, zda je výraz $p-2$ někdy roven nule: $p-2=0 \Rightarrow p=2$. Pokud chceme dělit, musíme $p=2$ vyloučit, abychom nedělili nulou.

$\Rightarrow$ **rozvětvení**

$p \neq 2$	$p = 2$
Můžeme vydělit rovnici výrazem $p-2$, protože se určitě nebude rovnat nule: $x(p-2) = 2p-4 \quad /:(p-2)$ $x = \frac{2p-4}{p-2} = \frac{2(p-2)}{p-2} = 2$ $K = \{2\}$	Nemůžeme vydělit výrazem $p-2$, ale víme, které konkrétní p nás zajímá a můžeme ho dosadit do rovnice před vydělením. $\Rightarrow$ $x(2-2) = 2.2 - 4$ $0x = 2.2 - 4$ $0 = 0 \quad \Rightarrow$ za x můžeme dosadit cokoliv $\Rightarrow \quad K = R$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p \neq 2$	$K = \{2\}$
$p = 2$	$K = R$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je důležitý, protože studenti zjistí, že k hodnotám parametru, které vylučují z dělení, není možné psát rovnou $K = \emptyset$. Dalším zajímavým rysem příkladu je jediná hodnota x pro všechna $p \neq 2$.

Pedagogická poznámka: Následující příklad 2 a příklad 4 jsou sice z hlediska řešení rovnic s parametrem jakoby zbytečné, ale mají obrovský význam pro pochopení podstaty parametrických rovnic. Právě podobným zkoušením studenti poznají, že přehledy na konci příkladů mají svůj význam.

Př. 2: Pomocí závěrečného přehledu předchozího příkladu rozhodni zda rovnice $2xp+p(1-x)=3p-4+2x$ vyjde, když dosadíme:

a) $p=1,\ x=3$ b) $p=\sqrt{2}$, $x=2$ c) $p=2$, $x=\pi$

Své rozhodnutí ověř dosazením do rovnice.

a) $p=1,\ x=3$

Hodnota parametru se nerovná 2, jde o první řádku přehledu. Hodnotou *x* má být dvojka, pro dvojici čísel $p=1,\ x=3$ rovnice nevyjde.

$2xp+p(1-x)=3p-4+2x$

$2\cdot3\cdot1+1(1-3)=3\cdot1-4+2\cdot3$

$4=5$

b) $p=\sqrt{2}$, $x=2$

Hodnota parametru se nerovná 2, jde o první řádku přehledu. Hodnotou *x* má být dvojka, pro dvojici čísel $p=\sqrt{2}$, $x=2$ rovnice vyjde.

$2xp+p(1-x)=3p-4+2x$

$2\cdot2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}(1-2)=3\cdot\sqrt{2}-4+2\cdot2$

$4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

c) $p=2$, $x=\pi$

Hodnota parametru se rovná 2, jde o druhou řádku přehledu. Hodnotou *x* může být cokoliv, pro dvojici čísel $p=2$, $x=\pi$ rovnice vyjde.

$2xp+p(1-x)=3p-4+2x$

$2\cdot\pi\cdot2+2(1-\pi)=3\cdot2-4+2\cdot\pi$

$4\pi+2-2\pi=6-4+2\pi$

$2+2\pi=2+2\pi$

Př. 3: Vyřeš rovnici $t(3+t)x=2t$ s neznámou *x* a parametrem *t*.

$t(3+t)x=2t$

Chceme vydělit rovnici výrazem $t(3+t)$, ale nesmíme dělit nulou. $\Rightarrow$ Kdy je výraz $t(3+t)$ roven nule: $t(3+t)=0\Rightarrow t=0;t=-3$. Pokud chceme dělit, musíme tato čísla vyloučit.

$\Rightarrow$ **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou proto píšeme pod sebe).

$t\neq0;-3$ $\Rightarrow$ můžeme vydělit rovnici výrazem $t(3+t)$, protože se určitě nebude rovnat nule:

$t(3+t)x=2t \quad /:t(3+t)$

$x=\dfrac{2t}{t(3+t)}$

$x=\dfrac{2}{(3+t)}$

$t=0$ $\Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow$

$t(3+t)x = 2t$

$0(3+0)x = 2\cdot 0$

$x\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ můžeme dosadit cokoliv $\Rightarrow \ K = R$

$t = -3 \ \Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow$

$t(3+t)x = 2t$

$-3(3-3)x = 2\cdot(-3)$

$x\cdot 0 = -6 \quad \Rightarrow \quad$ nikdy nevyjde $\quad \Rightarrow \ K = \emptyset$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	Řešení pro *x*:
$t \neq -3; 0$	$K = \left\{ \frac{2}{3+t} \right\}$
$t = 0$	$K = R$
$t = -3$	$K = \emptyset$

Pedagogická poznámka: Častou „chybou" bývá roznásobení závorek s parametrem na levé straně. Studenti pak pracně zjišťují, jaké hodnoty *t* mají zakázat. Určitě byste se o tom měli zmínit.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu (a některých následujících) je větvení příkladu napsáno pod sebe. Důvodem je malá šířka tří sloupců vedle sebe. V sešitech přesto doporučuji studentům tři sloupce zachovat.

Př. 4: Pomocí závěrečného přehledu předchozího příkladu najdi řešení rovnice $t(3+t)x = 2t$, pro následující hodnoty parametru *t*:

a) $t = 1$ b) $t = -3$ c) $t = \sqrt{5}$ d) $t = 0$

a) $t = 1$

Hodnota parametru je různá do 0 i -3, jde o první řádku přehledu. Pro *x* platí:

$x = \frac{2}{3+t} = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2}$. $x = 0,5$.

b) $t = -3$

Hodnota parametru se rovná -3, jde o třetí řádku přehledu. $K = \emptyset$, neexistuje žádné *x* vyhovující rovnici.

c) $t = \sqrt{5}$

Hodnota parametru je různá do 0 i -3, jde o první řádku přehledu. Pro *x* platí:

$x = \frac{2}{3+t} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

d) $t = 0$

Hodnota parametru se rovná 0, jde o druhou řádku přehledu. $K = R$, za *x* mohu dosadit libovolné reálné číslo.

Př. 5: Vyřeš rovnici $x\left(p^2-1\right)=p^2+p$ s neznámou *x* a parametrem *p*.

$x\left(p^2-1\right)=p^2+p$

$x(p+1)(p-1)=p(p+1)$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(p+1)(p-1)$ a nesmíme dělit nulou. $\Rightarrow$ Kdy je výraz $(p+1)(p-1)$ roven nule: $(p+1)(p-1)=0 \Rightarrow p=\pm 1$. Pokud chceme dělit, musíme tato čísla vyloučit.

$\Rightarrow$ **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou proto píšeme pod sebe).

$p \neq \pm 1 \Rightarrow$ můžeme vydělit rovnici výrazem $(p+1)(p-1)$, protože se určitě nebude rovnat nule: $x(p+1)(p-1)=p(p+1) \quad / :(p+1)(p-1)$

$$x=\frac{p(p+1)}{(p-1)(p+1)}$$

$$x=\frac{p}{(p-1)} \qquad K=\left\{\frac{p}{p-1}\right\}$$

$p=-1 \Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow$

$x(p+1)(p-1)=p(p+1)$

$x(-1+1)(-1-1)=-1(-1+1)$

$x\cdot 0=0 \quad \Rightarrow \quad$ můžeme dosadit cokoliv $\Rightarrow K=R$

$p=1 \Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow$

$x(p+1)(p-1)=p(p+1)$

$x(1+1)(1-1)=1(1+1)$

$x\cdot 0=2 \quad \Rightarrow \quad$ nikdy nevyjde $\quad \Rightarrow K=\emptyset$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p \neq \pm 1$	$K=\left\{\frac{p}{p-1}\right\}$
$p=-1$	$K=R$
$p=1$	$K=\emptyset$

Pedagogická poznámka: Občas se objevuje při řešení tohoto příkladu ještě jedna větev řešení pro hodnotu parametru $p=0$. Vypadá takto:

$x(p+1)(p-1)=p(p+1)$ dosadím $p=0$.

$x(0+1)(0-1)=0(0+1)$

$-x=0$

$x=0$.

V přehledu pak přibude další řádka:

$p=0$	$K=\{0\}$

Není možné říct, že by tento krok byl vyloženě špatně. Je však vyloženě nesmyslný. Hodnota parametru $p=0$ není z hlediska řešení příkladu vůbec zajímavá. Výraz *p* se v rozkladu na pravé straně vyskytuje, ale nikdy s ním nedělíme a jeho hodnota tak může být libovolná.

Řešení pro $p = 0$, tak je obsaženo už v prvním řádku přehledu a umožňuje nám určit hodnotu x daleko rychleji: $x = \frac{p}{p-1} = \frac{0}{0-1} = 0$.

Př. 6: Vyřeš rovnici $p(xp-1) = 1-x$ s neznámou x a parametrem p.

$$p(xp-1) = 1-x$$
$$xp^2 - p = 1-x$$
$$xp^2 + x = p+1$$
$$x(p^2+1) = p+1$$

Chceme vydělit rovnici výrazem (p^2+1) a nesmíme dělit nulou. $\Rightarrow$ Výraz (p^2+1) je vždy větší než nula $\Rightarrow$ můžeme dělit pro všechny hodnoty p.

$$x = \frac{p+1}{p^2+1}$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p:	**Řešení pro x:**
$p \in R$	$K = \left\{ \frac{p+1}{p^2+1} \right\}$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu jde samozřejmě o to, aby studenti neštěpili řešení a vše zahrnuli najednou.

Př. 7: Urči, pro které hodnoty parametru p je řešením rovnice $p(xp+1) = 2(x+1) + xp$ kladné číslo.

Řešíme rovnici: $p(xp+1) = 2(x+1) + xp$.

$$xp^2 + p = 2x + 2 + xp$$
$$xp^2 - xp - 2x = 2 - p$$

$x(p^2 - p - 2) = 2 - p$ Budeme chtít zjistit, kdy je možné výrazem v závorce dělit $\Rightarrow$ rozložíme ho na součin: $p^2 - p - 2 = (p-2)(p+1)$.

Chceme vydělit rovnici výrazem $(p-2)(p+1)$ a nesmíme dělit nulou. $\Rightarrow$ Kdy je výraz $(p-2)(p+1)$ roven nule: $(p-2)(p+1) = 0 \Rightarrow p = -1; 2$. Pokud chceme dělit, musíme tato čísla vyloučit.

$\Rightarrow$ **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou proto píšeme pod sebe).

$p \neq -1; 2$ $\Rightarrow$ můžeme vydělit rovnici výrazem $(p-2)(p+1)$, protože se určitě nebude rovnat nule: $x(p-2)(p+1) = 2 - p \quad / : (p-2)(p+1)$

$x = \frac{2-p}{(p-2)(p+1)} = -\frac{1}{p+1}$ $\qquad K = \left\{ -\frac{1}{p+1} \right\}$

$p = -1$ $\Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow$

$x(p-2)(p+1)=2-p$

$x(-1-2)(-1+1)=2-(-1)$

$x\cdot 0=3$ $\Rightarrow$ nikdy nevyjde $\Rightarrow$ $K=\emptyset$

$p=2$ $\Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow$

$x(p-2)(p+1)=2-p$

$x(2-2)(p+1)=2-2$

$x.0=0$ $\Rightarrow$ můžeme dosadit cokoliv $\Rightarrow$ $K=R$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p\neq -1;2$	$K=\left\{-\frac{1}{p+1}\right\}$
$p=-1$	$K=\emptyset$
$p=2$	$K=R$

Nejsme hotoví, zajímá nás, kdy je řešením kladné číslo, projdeme tabulku:

$p\neq -1;2$ $x=-\frac{1}{p+1}>0$ řešíme nerovnici $-\frac{1}{p+1}>0$

$\frac{1}{p+1}<0$ $\Rightarrow$ $p+1<0$ $p<-1$

$p=-1$ $K=\emptyset$ nevyjde nic, natož kladné číslo

$p=2$ $K=R$ některá z čísel, která vyšla jsou kladná

Rovnice má kladné řešení právě když $p\in(-\infty;-1)\cup\{2\}$.

Př. 8: Petáková:
strana 21/cvičení 1 a) b) d)
strana 21/cvičení 2
strana 21/cvičení 3

Shrnutí: Rovnice s parametrem řešíme stejně jako rovnice bez parametru, pouze v okamžiku, kdy provádíme operace, které není možné provést se všemi čísly, rozebereme možné hodnoty parametru a případně rozdělíme řešení.