

2.7.25 Použití substituce pro řešení nerovnic II

Př. 1: Vyřeš nerovnici $\sqrt{(x^2 + 3x)^2 + 2} < x^2 + 3x + 2$.

Substituce: použijeme $y = x^2 + 3x \Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $\sqrt{y^2 + 2} < y + 2$

2. Hledáme řešení rovnice $\sqrt{y^2 + 2} = y + 2$.

$$\sqrt{y^2 + 2} = y + 2 \quad /^2 \quad y^2 + 2 = y^2 + 4y + 4 \quad y = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Zkouška: } y = -\frac{1}{2} \quad L = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \quad P = y + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

interval $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$: $\sqrt{3} < 1$ - neplatí \Rightarrow interval $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ není řešením

interval $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$: $\sqrt{2} < 2$ - platí \Rightarrow interval $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$ je řešením

$$y \in \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$$

Návrat k původní proměnné:

$$x^2 + 3x = y > -\frac{1}{2} \text{ - řešíme nerovnici } x^2 + 3x > -\frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$K = \left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3 + \sqrt{7}}{2}; \infty\right)$$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $(u - 2)^2 - 3|u - 2| + 2 \leq 0$.

Substituce: $x = |u - 2| \Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (x - 2)(x - 1) = 0 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 1$$

$$x \in \langle 1; 2 \rangle$$

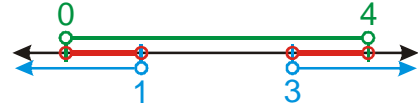
Návrat k původní proměnné:

$$|u - 2| \in \langle 1; 2 \rangle \Leftrightarrow |u - 2| > 1 \text{ a zároveň } |u - 2| < 2$$

$ u - 2 > 1$	$ u - 2 < 2$
Absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel znamená vzdálenost jejich obrazu na číselné ose \Rightarrow hledám čísla jejich obrazy jsou od obrazu 2 vzdáleny více než o jeden.	Absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel znamená vzdálenost jejich obrazu na číselné ose \Rightarrow hledám čísla jejich obrazy jsou od obrazu 2 vzdáleny méně než o dva.
$K_1 = (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$	$K_2 = (0; 4)$

Hledáme průnik množin $K_1 = (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$ a $K_2 = (0; 4)$ (u musí splňovat obě podmínky).

Nakreslíme si osu a najdu průnik:



$$K = K_1 \cap K_2 = (0; 1) \cup (3; 4)$$

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 7\frac{x+1}{x-1} + 12 \geq 0$.

podmínka $x \neq 1$,

Substituce: $y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2 - 7y + 12 \geq 0$.

$$y^2 - 7y + 12 = 0 \quad (y-3)(y-4) = 0 \quad y_1 = 3 \quad y_2 = 4$$

$$y \in (-\infty; 3) \cup (4; \infty)$$

Návrat k původní proměnné:

$$\frac{x+1}{x-1} = y \in (-\infty; 3) \cup (4; \infty)$$

$$\frac{x+1}{x-1} \in (-\infty; 3) \cup (4; \infty) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \leq 3 \text{ nebo } \frac{x+1}{x-1} \geq 4$$

Získali jsem dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, protože stačí, když platí jedna z nich, konečný výsledek získáme jako sjednocení jejich řešení.

$$\frac{x+1}{x-1} \leq 3$$

$x \in (-\infty; 1) \Rightarrow x-1 \leq 0 \Rightarrow$ násobíme záporným číslem a obracíme znaménko nerovnosti:

$$x+1 \geq 3(x-1)$$

$$x+1 \geq 3x-3$$

$$4 \geq 2x$$

$$2 \geq x$$

$$K_{11} = (-\infty; 1)$$

$x \in (1; \infty) \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow$ násobíme kladným číslem a znaménko nerovnosti neměníme:

$$x+1 \leq 3(x-1)$$

$$x+1 \leq 3x-3$$

$$4 \leq 2x$$

$$2 \leq x \quad K_{12} = (2; \infty)$$

$$K_1 = (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$$

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 4$$

$x \in (-\infty; 1) \Rightarrow x-1 \leq 0 \Rightarrow$ násobíme záporným číslem a obracíme znaménko nerovnosti:

$$x+1 \leq 4(x-1)$$

$$\frac{5}{3} \leq x$$

$$K_{21} = \emptyset$$

$x \in (1; \infty) \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow$ násobíme kladným číslem a znaménko nerovnosti neměníme:

$$x+1 \geq 4(x-1)$$

$$\frac{5}{3} \geq x$$

$$K_{22} = \left(1; \frac{5}{3}\right)$$

$$K_2 = \left(1; \frac{5}{3}\right)$$

Hledáme sjednocení množin $K_1 = (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$ a $K_2 = \left(1; \frac{5}{3}\right)$

$$K = K_1 \cap K_2 = (-\infty; 1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right) \cup (2; \infty)$$