2.7.25 Použití substituce pro řešení nerovnic II

Př. 1: Vyřeš nerovnici $\sqrt{\left(x^2+3x\right)^2+2}<x^2+3x+2$.

Substituce: použijeme $y=x^2+3x \Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $\sqrt{y^2+2}<y+2$

2. Hledáme řešení rovnice $\sqrt{y^2+2}=y+2$**.**

$\sqrt{y^2+2}=y+2 \quad /^2 \quad y^2+2=y^2+4y+4 \qquad y=-\frac{1}{2}$

Zkouška: $y=-\frac{1}{2}$ $\quad L=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2}=\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$ $\qquad P=y+2=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

interval $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$: $\sqrt{3}<1$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ není řešením

interval $\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$: $\sqrt{2}<2$ - platí $\Rightarrow$ interval $\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$ je řešením

$y\in\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$

Návrat k původní proměnné:

$x^2+3x=y>-\frac{1}{2}$ - řešíme nerovnici $x^2+3x>-\frac{1}{2}$

$2x^2+6x+1=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\frac{-6\pm\sqrt{28}}{4}=\frac{-6\pm2\sqrt{7}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$$

$$K=\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{7}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{7}}{2};\infty\right)$$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $(u-2)^2-3|u-2|+2\le 0$.

Substituce: $x=|u-2| \Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $x^2-3x+2\le 0$.

$x^2-3x+2=0 \qquad (x-2)(x-1)=0 \qquad x_1=2 \qquad x_2=1$

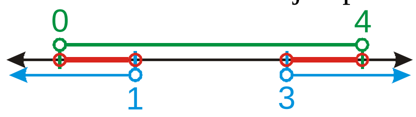
$x\in\langle 1;2\rangle$

Návrat k původní proměnné:

<table>
<tr><td colspan="2">$|u-2|\in\langle 1;2\rangle \Leftrightarrow |u-2|>1$ a zároveň $|u-2|<2$</td></tr>
<tr><td>$|u-2|>1$
Absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel znamená vzdálenost jejich obrazu na číselné ose $\Rightarrow$ hledám čísla jejich obrazy jsou od obrazu 2 vzdáleny více než o jeden.
$K_1=(-\infty;1)\cup(3;\infty)$</td><td>$|u-2|<2$
Absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel znamená vzdálenost jejich obrazu na číselné ose $\Rightarrow$ hledám čísla jejich obrazy jsou od obrazu 2 vzdáleny méně než o dva.
$K_2=(0;4)$</td></tr>
</table>

Hledáme průnik množin $K_1 = (-\infty;1) \cup (3;\infty)$ a $K_2 = (0;4)$ (*u* musí splňovat obě podmínky).

Nakreslíme si osu a najdu průnik:



$K = K_1 \cap K_2 = (0;1) \cup (3;4)$

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 7\frac{x+1}{x-1} + 12 \geq 0$.

podmínka $x \neq 1$,

Substituce: $y = \frac{x+1}{x-1}$ $\Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2 - 7y + 12 \geq 0$.

$y^2 - 7y + 12 = 0$ $\qquad (y-3)(y-4) = 0$ $\qquad y_1 = 3$ $\qquad y_2 = 4$

$y \in (-\infty;3\rangle \cup \langle 4;\infty)$

Návrat k původní proměnné:

$\frac{x+1}{x-1} = y \in (-\infty;3\rangle \cup \langle 4;\infty)$

<table>
<tr><td colspan="2">$\frac{x+1}{x-1} \in (-\infty;3\rangle \cup \langle 4;\infty) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \leq 3$ nebo $\frac{x+1}{x-1} \geq 4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Získali jsem dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, protože stačí, když platí jedna z nich, konečný výsledek získáme jako sjednocení jejich řešení.</td></tr>
<tr><td>$\frac{x+1}{x-1} \leq 3$
$x \in (-\infty;1) \Rightarrow x-1 \leq 0 \Rightarrow$ násobíme záporným číslem a obracíme znaménko nerovnosti:
$x+1 \geq 3(x-1)$
$x+1 \geq 3x-3$
$4 \geq 2x$
$2 \geq x$ $\qquad K_{11} = (-\infty;1)$
$x \in (1;\infty) \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow$ násobíme kladným číslem a znaménko nerovnosti neměníme:
$x+1 \leq 3(x-1)$
$x+1 \leq 3x-3$
$4 \leq 2x$
$2 \leq x$ $\quad K_{12} = \langle 2;\infty)$
$K_1 = (-\infty;1) \cup \langle 2;\infty)$</td><td>$\frac{x+1}{x-1} \geq 4$
$x \in (-\infty;1) \Rightarrow x-1 \leq 0 \Rightarrow$ násobíme záporným číslem a obracíme znaménko nerovnosti:
$x+1 \leq 4(x-1)$
$\frac{5}{3} \leq x$ $\qquad K_{21} = \emptyset$
$x \in (1;\infty) \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow$ násobíme kladným číslem a znaménko nerovnosti neměníme:
$x+1 \geq 4(x-1)$
$\frac{5}{3} \geq x$ $\qquad K_{22} = \left(1;\frac{5}{3}\right\rangle$
$K_2 = \left(1;\frac{5}{3}\right\rangle$</td></tr>
</table>

Hledáme sjednocení množin $K_1 = (-\infty;1) \cup \langle 2;\infty)$ a $K_2 = \left(1;\frac{5}{3}\right\rangle$

$K = K_1 \cap K_2 = (-\infty;1) \cup \left(1;\frac{5}{3}\right\rangle \cup \langle 2;\infty)$