

2.7.24 Použití substituce pro řešení nerovnic I

Př. 1: Vyřeš nerovnici $x^4 - 6x^2 + 5 > 0$.

Substituce: použijeme $y = x^2 \Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2 - 6y + 5 > 0$ obyčejná kvadratická nerovnice.

Zjistíme průsečíky grafu s osou x :

$$y^2 - 6y + 5 = 0 \quad (y-5)(y-1) = 0 \quad y_1 = 5 \quad y_2 = 1$$

$$y \in (-\infty; 1) \cup (5; \infty)$$

Návrat k původní proměnné:

$$x^2 = y \in (-\infty; 1) \cup (5; \infty)$$

Přepíšeme oba intervaly hodnot x^2 pomocí nerovnic:

$x^2 \in (-\infty; 1) \Rightarrow x^2 < 1$	$x^2 \in (5; \infty) \Rightarrow x^2 > 5$
Získali jsem dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť a výsledky sjednotíme	
$x^2 < 1$ $x_1 = 1 \quad x_2 = -1$ $K_1 = (-1; 1)$	$x^2 > 5$ $x_1 = \sqrt{5} \quad x_2 = -\sqrt{5}$ $K_2 = (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \infty)$

$$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{5}; \infty)$$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $x^4 + 4x^2 + 3 > 0$.

Substituce: použiju $y = x^2 \Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2 + 4y + 3 > 0$ obyčejná kvadratická

$$y^2 + 4y + 3 > 0 \quad (y+3)(y+1) > 0 \quad y_1 = -3 \quad y_2 = -1$$

$$y \in (-\infty; -3) \cup (-1; \infty)$$

Návrat k původní proměnné:

$$x^2 = y \in (-\infty; -3) \cup (-1; \infty)$$

Přepíšeme oba intervaly hodnot x^2 pomocí nerovnic:

$x^2 \in (-\infty; -3) \Rightarrow x^2 < -3$	$x^2 \in (-1; \infty) \Rightarrow x^2 > -1$
Získali jsem dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť a výsledky sjednotíme	
$x^2 < -3$ nemá cenu počítat, platí $x^2 \geq 0 \Rightarrow$ $K_1 = \emptyset$	$x^2 > -1$ nemá cenu počítat, platí $x^2 \geq 0 \Rightarrow K_2 = R$

$$K = K_1 \cup K_2 = R$$

Př. 3: Řešení nerovnice $x^4 + 4x^2 + 3 > 0$ z předchozího příkladu je zřejmé už ze zadání. Vysvětli.

Neznámá se na levé straně nerovnice vyskytuje pouze v sudých mocninách \Rightarrow

$$\Rightarrow x^4 + 4x^2 + 3 > 0 \text{ pro všechna } x \in R \Rightarrow K = R$$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $x^4 - 7x^2 + 12 < 0$.

Substituce: použijeme $y = x^2 \Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2 - 7y + 12 < 0$ obyčejná kvadratická nerovnice.

Zjistíme průsečíky grafu s osou x : $(y-4)(y-3) = 0$ $y_1 = 4$ $y_2 = 3$

hledáme body pod osou $x \Rightarrow y \in (3; 4)$

Návrat k původní proměnné:

$$x^2 = y \in (3; 4)$$

$$x^2 \in (3; 4) \Leftrightarrow x^2 > 3 \text{ a zároveň } x^2 < 4$$

Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě podmínky najednou výsledek získáme jako průnik jejich řešení

$x^2 > 3$ $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$ $x_1 = \sqrt{3} \quad x_2 = -\sqrt{3}$ $K_1 = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$	$x^2 < 4$ $(x - 2)(x + 2) = 0$ $x_1 = 2 \quad x_2 = -2$ $K_2 = (-2; 2)$
---	--

Hledáme průnik množin $K_1 = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$ a $K_2 = (-2; 2)$ (x musí splňovat obě podmínky). Nakreslíme si osu a najdeme průnik:



$$K = K_1 \cap K_2 = (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2)$$

Vyřeš nerovnici $x^4 - 4x^2 - 5 \leq 0$.

Zadání upravíme podobně jako u předchozích příkladů: $x^4 - 4x^2 - 5 = (x^2)^2 - 4(x^2) - 5 \leq 0$, v nerovnici pak vystupuje pouze x^2 .

Substituce: použijeme $y = x^2 \Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2 - 4y - 5 \leq 0$ obyčejná kvadratická nerovnice.

Zjistíme průsečíky grafu s osou x : $(y+1)(y-5) \leq 0$ $y_1 = -1$ $y_2 = 5$

hledáme body pod osou $x \Rightarrow y \in \langle -1; 5 \rangle$

Návrat k původní proměnné:

$$x^2 \in \langle -1; 5 \rangle \Leftrightarrow x^2 \geq -1 \text{ a zároveň } x^2 \leq 5$$

Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě podmínky najednou výsledek získáme jako průnik jejich řešení

$x^2 \geq -1$ Nemusíme nic počítat, $x^2 \geq 0$ vždy \Rightarrow $K_1 = R$	$x^2 \leq 5$ $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$ $x_1 = \sqrt{5} \quad x_2 = -\sqrt{5}$ $K_2 = \langle -\sqrt{5}; \sqrt{5} \rangle$
---	---

Hledáme průnik množin $K_1 = R$ a $K_2 = \langle -\sqrt{5}; \sqrt{5} \rangle$ (x musí splňovat obě podmínky).

$$K = K_1 \cap K_2 = K_2 = \langle -\sqrt{5}; \sqrt{5} \rangle$$