2.7.24 Použití substituce pro řešení nerovnic I

Př. 1: Vyřeš nerovnici $x^4 - 6x^2 + 5 > 0$.

Substituce: použijeme $y = x^2$ $\Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2 - 6y + 5 > 0$ obyčejná kvadratická nerovnice.
Zjistíme průsečíky grafu s osou x:
$y^2 - 6y + 5 = 0$ $\quad (y-5)(y-1) = 0$ $\quad y_1 = 5$ $\quad y_2 = 1$
$y \in (-\infty;1) \cup (5;\infty)$

Návrat k původní proměnné:
$x^2 = y \in (-\infty;1) \cup (5;\infty)$

Přepíšeme oba intervaly hodnot x^2 pomocí nerovnic:

$x^2 \in (-\infty;1) \Rightarrow x^2 < 1$	$x^2 \in (5;\infty) \Rightarrow x^2 > 5$
Získali jsem dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť a výsledky sjednotíme	
$x^2 < 1$ $x_1 = 1$ $\quad x_2 = -1$ $K_1 = (-1;1)$	$x^2 > 5$ $x_1 = \sqrt{5}$ $\quad x_2 = -\sqrt{5}$ $K_2 = (-\infty;-\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5};\infty)$

$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty;-\sqrt{5}) \cup (-1;1) \cup (\sqrt{5};\infty)$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $x^4 + 4x^2 + 3 > 0$.

Substituce: použiju $y = x^2$ $\Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2 + 4y + 3 > 0$ obyčejná kvadratická
$y^2 + 4y + 3 > 0$ $\quad (y+3)(y+1) > 0$ $\quad y_1 = -3$ $\quad y_2 = -1$
$y \in (-\infty;-3) \cup (-1;\infty)$

Návrat k původní proměnné:
$x^2 = y \in (-\infty;-3) \cup (-1;\infty)$

Přepíšeme oba intervaly hodnot x^2 pomocí nerovnic:

$x^2 \in (-\infty;-3) \Rightarrow x^2 < -3$	$x^2 \in (-1;\infty) \Rightarrow x^2 > -1$
Získali jsem dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť a výsledky sjednotíme	
$x^2 < -3$ nemá cenu počítat, platí $x^2 \geq 0$ $\Rightarrow$ $K_1 = \emptyset$	$x^2 > -1$ nemá cenu počítat, platí $x^2 \geq 0$ $\Rightarrow$ $K_2 = R$

$K = K_1 \cup K_2 = R$

Př. 3: Řešení nerovnice $x^4 + 4x^2 + 3 > 0$ z předchozího příkladu je zřejmé už ze zadání. Vysvětli.

Neznámá se na levé straně nerovnice vyskytuje pouze v sudých mocninách $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $x^4 + 4x^2 + 3 > 0$ pro všechna $x \in R$ $\Rightarrow$ $K = R$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $x^4 - 7x^2 + 12 < 0$.

Substituce: použijeme $y = x^2$ $\Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2 - 7y + 12 < 0$ obyčejná kvadratická nerovnice.

Zjistíme průsečíky grafu s osou *x*: $(y-4)(y-3) = 0$ $y_1 = 4$ $y_2 = 3$

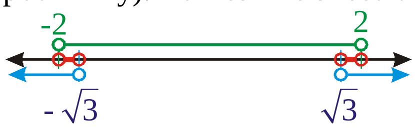
hledáme body pod osou *x* $\Rightarrow$ $y \in (3;4)$

Návrat k původní proměnné:

$x^2 = y \in (3;4)$

$x^2 \in (3;4) \Leftrightarrow x^2 > 3$ a zároveň $x^2 < 4$	
Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě podmínky najednou výsledek získáme jako průnik jejich řešení	
$x^2 > 3$ $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$ $x_1 = \sqrt{3}$ $x_2 = -\sqrt{3}$ $K_1 = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$	$x^2 < 4$ $(x-2)(x+2) = 0$ $x_1 = 2$ $x_2 = -2$ $K_2 = (-2;2)$

Hledáme průnik množin $K_1 = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$ a $K_2 = (-2;2)$ (*x* musí splňovat obě podmínky). Nakreslíme si osu a najdeme průnik:



$K = K_1 \cap K_2 = (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2)$

Vyřeš nerovnici $x^4 - 4x^2 - 5 \le 0$.

Zadání upravíme podobně jako u předchozích příkladů: $x^4 - 4x^2 - 5 = (x^2)^2 - 4(x^2) - 5 \le 0$, v nerovnici pak vystupuje pouze x^2.

Substituce: použijeme $y = x^2$ $\Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2 - 4y - 5 \le 0$ obyčejná kvadratická nerovnice.

Zjistíme průsečíky grafu s osou *x*: $(y+1)(y-5) \le 0$ $y_1 = -1$ $y_2 = 5$

hledáme body pod osou *x* $\Rightarrow$ $y \in \langle -1;5 \rangle$

Návrat k původní proměnné:

$x^2 \in \langle -1;5 \rangle \Leftrightarrow x^2 \ge -1$ a zároveň $x^2 \le 5$	
Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě podmínky najednou výsledek získáme jako průnik jejich řešení	
$x^2 \ge -1$ Nemusíme nic počítat, $x^2 \ge 0$ vždy $\Rightarrow$ $K_1 = R$	$x^2 \le 5$ $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = 0$ $x_1 = \sqrt{5}$ $x_2 = -\sqrt{5}$ $K_2 = \langle -\sqrt{5}; \sqrt{5} \rangle$

Hledáme průnik množin $K_1 = R$ a $K_2 = \langle -\sqrt{5}; \sqrt{5} \rangle$ (*x* musí splňovat obě podmínky).

$K = K_1 \cap K_2 = K_2 = \langle -\sqrt{5}; \sqrt{5} \rangle$