

### 2.7.23 Použití substituce při řešení soustav rovnic

**Př. 1:** Mistr s učněm opravují auto. Kdyby pracovali společně 5hodin, učedník by práci dodělal za 1hodinu. Kdyby pracovali společně 2 hodiny a pak mistr ještě 3 hodiny sám, zbývalo by ještě 1/3 práce. Jak dlouho by auto opravoval každý sám?

$$\text{společně 5hodin učedník by práci dodělal za 1hodinu} \Rightarrow 5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y} = 1$$

$$\text{společně 2 hodiny, mistr 3 hodiny sám, zbývalo by ještě 1/3 práce} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{3}{x} = 1 - \frac{1}{3}$$

$5(a+b)+b=1$	$5a+6b=1$	$5a+6b=1$
$2(a+b)+3a=1-\frac{1}{3}$ <small>upravíme:</small>	$5a+2b=\frac{2}{3}$	$\begin{matrix} \text{[1]} - \text{[2]} \\ 4b = \frac{1}{3} \end{matrix}$
<hr/>	<hr/>	<hr/>
Dopočteme $b$ : $4b = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{12}$	získáme $a$ z první rovnice:	$5a + 6 \cdot \frac{1}{12} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{10}$

**Návrat k původní proměnné:**

$$\frac{1}{x} = a = \frac{1}{10} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{10} \Rightarrow x = 10 \quad \frac{1}{y} = b = \frac{1}{12} \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \Rightarrow y = 12$$

$K = \{[10;12]\}$  Mistr by provedl opravu za 10 hodin, učedník za 12.

**Př. 2:** Káťa K. s Vojtou H. ze 4B2009 mažou za trest tabule na celé škole. Když budou mazat společně 25 minut, domaže Káťa zbytek za 5minut. Když bude Vojta mazat 28 minut sám, dodělají trest společně za 12 minut. Za jak dlouho by všechny tabule smazal každý z nich sám.

$$\text{společně 25 minut domaže Káťa zbytek za 5minut: } 25\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{5}{x} = 1$$

$$\text{Vojta mazat 28 minut a dodělají trest společně za 12 minut: } 12\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{28}{y} = 1$$

$25(a+b)+5a=1$	$30a+25b=1$	$12a+40b=1 \Rightarrow a = \frac{1-40b}{12}$
$12(a+b)+28b=1$	$12a+40b=1$	
<hr/>	<hr/>	
$30\frac{1-40b}{12} + 25b = 1$	$15 - 600b + 150b = 6$	$450b = 9 \quad b = \frac{1}{50} \quad a = \frac{1-40 \cdot \frac{1}{50}}{12} = \frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{1}{60}$

**Návrat k původní proměnné:**

$$\frac{1}{x} = a = \frac{1}{60} \quad \frac{1}{y} = b = \frac{1}{50} \quad K = \{[60;50]\} \text{ Káťa za 60 minut, Vojta za 50 minut.}$$

**Př. 3:** Vyřeš soustavu rovnic  $x^2 + y^2 = 61$        $x^2 - y^2 = 11$ .

**Substituce:** soustava obsahuje pouze  $x^2$  a  $y^2$ , substitucí se zbavíme druhých mocnin:  $x^2 = a$ ,  $y^2 = b \Rightarrow$

Řešíme soustavu:

$a+b=61$	$a+b=61$	$a=36$ Dopočteme $b$ : $b=25$
$a-b=11$	$\begin{matrix} \text{[1]} + \text{[2]} \\ 2a = 72 \end{matrix}$	
<hr/>	<hr/>	

**Návrat k původní proměnné:**

$$x^2 = a = 36 \quad x^2 - 36 = 0 \quad (x-6)(x+6) = 0 \quad x_1 = 6 \quad x_2 = -6$$

$$y^2 = b = 25 \quad y^2 - 25 = 0 \quad (y-5)(y+5) = 0 \quad y_1 = 5 \quad y_2 = -5$$

$K = \{[-6;-5]; [-6;5]; [6;-5]; [6;5]\}$

**Př. 4:** Vyřeš soustavu rovnic  $x^2 + y^2 = 13$   $x^2 + 2y = 10$

$$\begin{array}{l} a + y^2 = 13 \\ a + 2y = 10 \end{array} \Rightarrow a = 10 - 2y \quad (10 - 2y) + y^2 = 13$$

$$\begin{array}{l} y^2 - 2y - 3 = 0 \\ (y + 1)(y - 3) = 0 \end{array}$$

$$y_1 = -1 \Rightarrow a_1 = 10 - 2y = 10 - 2 \cdot (-1) = 12 \quad y_2 = 3 \Rightarrow a_2 = 10 - 2y = 10 - 2 \cdot 3 = 4$$

z dvojice  $a_1 = 12, y_1 = -1$  z dvojice  $a_2 = 4, y_2 = 3$

$$\begin{array}{l} x^2 - 12 = 0 \\ (x - \sqrt{12})(x + \sqrt{12}) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \\ (x - 2)(x + 2) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{12} \quad x_2 = -\sqrt{12} \\ x_1 = 2 \quad x_2 = -2 \end{array}$$

Tedy dvojice řešení  $[\sqrt{12}; -1]$  a  $[-\sqrt{12}; -1]$  Tedy dvojice řešení  $[2; 3]$  a  $[-2; 3]$

$$K = \{[\sqrt{12}; -1]; [-\sqrt{12}; -1]; [2; 3]; [-2; 3]\}$$

**Př. 5:** Vyřeš soustavu rovnic  $\frac{3x}{x-1} + 2\frac{y}{y+1} = 7$   $\frac{4x}{x-1} - \frac{y}{y+1} = 2$

Podmínky:  $x \neq 1, y \neq -1$

**Substituce:**  $\frac{x}{x-1} = a, \frac{y}{y+1} = b \Rightarrow$  Řešíme soustavu:  $\begin{array}{l} 3a + 2b = 7 \\ 4a - b = 2 \end{array} \Rightarrow b = 4a - 2$

$$3a + 2(4a - 2) = 7 \quad 11a = 11 \quad a = 1 \quad b = 4a - 2 = 4 \cdot 1 - 2 = 2$$

**Návrat k původní proměnné:**

$\frac{x}{x-1} = a = 1 \quad \frac{x}{x-1} = 1 \quad \cdot (x-1) \quad x = x-1 \quad 0 = -1$  - nemůžeme najít žádné  $x \Rightarrow$  soustava nemá řešení,  
nemá cenu dopočítávat  $y \quad K = \emptyset$

**Př. 6:** Vyřeš soustavu rovnic  $\frac{2(x-1)}{y+1} - \frac{3(y+2)}{x-1} = 3$   $\frac{x-1}{y+1} + \frac{2(y+2)}{x-1} = -2$

Podmínky:  $x \neq 1, y \neq -1$

$\frac{x-1}{y+1} = a, \frac{y+2}{x-1} = b \Rightarrow$  Řešíme soustavu:  $\begin{array}{l} 2a - 3b = 3 \\ a + 2b = -2 \end{array}$

$$\begin{array}{l} 2a - 3b = 3 \\ [1] - 2 \cdot [2] \\ \hline -7b = 7 \end{array} \quad b = -1 \quad 2a - 3b = 3 \Rightarrow 2a - 3 \cdot (-1) = 3 \quad a = 0$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$\begin{array}{l} \frac{x-1}{y+1} = a = 0 \\ \frac{y+2}{x-1} = b = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-1 = 0 \\ y+2 = 1-x \end{array}$$

Z první rovnice vyjádříme  $x: x = 1$ , dosadíme do druhé:

$y + 2 = 1 - 1 \quad y = -2 \quad [1; -2]$ , nevyhovuje podmínce:  $x \neq 1$ .  $K = \emptyset$

**Př. 7:** Petáková:

strana 17/cvičení 34 c) d) ;strana 17/cvičení 35 b)  
strana 17/cvičení 36 a) b) strana 17/cvičení 37 b) c) d)