

## 2.7.23 Použití substituce při řešení soustav rovnic

**Předpoklady:** 2722

**Pedagogická poznámka:** Hodinu je možné pojmut dvěma způsoby:

Pokud budete řešit i slovní úlohy, je potřeba ještě polovina další vyučovací hodiny (zbytek pak můžete věnovat písemce).

Pokud slovní úlohy vynecháte, 45 minut bude stačit.

**Pedagogická poznámka:** Stejně jako ve všech ostatních příkladech s použitím substituce je třeba dát pozor, aby studenti nahradili všechny výskyty proměnné a pouze tehdy pokud jde opravdu o stejné výrazy.

**Př. 1:** Mistr s učněm opravují auto. Kdyby pracovali společně 5hodin, učeďník by práci dodělal za 1hodinu. Kdyby pracovali společně 2 hodiny a pak mistr ještě 3 hodiny sám, zbývalo by ještě 1/3 práce. Jak dlouho by auto opravoval každý sám?

mistr  $x$  hodin celá oprava  $\Rightarrow$  za jednu hodinu  $\frac{1}{x}$

učeň  $y$  hodin celá oprava  $\Rightarrow$  za jednu hodinu  $\frac{1}{y}$

sestavíme rovnice:

společně 5hodin učeďník by práci dodělal za 1hodinu  $\Rightarrow 5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y} = 1$

společně 2 hodiny a pak mistr ještě 3 hodiny sám, zbývalo by ještě 1/3 práce

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{3}{x} = 1 - \frac{1}{3}$$

získáváme soustavu:

$$5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y} = 1$$

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{3}{x} = 1 - \frac{1}{3}$$

Nevýhoda – obě neznámé ve jmenovateli  $\Rightarrow$

**Substitute:**  $\frac{1}{x} = a$ ,  $\frac{1}{y} = b \Rightarrow$  Řešíme soustavu:

$$5(a+b) + b = 1$$

$$2(a+b) + 3a = 1 - \frac{1}{3} \text{ . upravíme:}$$

$$5a + 6b = 1$$

$$5a + 2b = \frac{2}{3}$$

$$5a + 6b = 1$$

$$\begin{array}{r} \text{[1]} - \text{[2]} \\ \hline 4b = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{Dopočteme } b: 4b = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{12}$$

získáme  $a$  z první rovnice:

$$5a + 6 \cdot \frac{1}{12} = 1$$

$$5a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{10}$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$\frac{1}{x} = a = \frac{1}{10} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{10} \Rightarrow x = 10$$

$$\frac{1}{y} = b = \frac{1}{12} \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \Rightarrow y = 12$$

$$K = \{[10;12]\}$$

Mistr by provedl opravu za 10 hodin, učedník za 12.

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad považuji za jeden ze svých největších pedagogických úspěchů. Ve třídě 4B2011 se přes to, že od poslední úlohy na společnou práci uplynulo přes dva měsíce a třída předvedla krátký výstup naprosté beznaděje a bezmoci, podařilo samostatně vyřešit úkol prakticky všem. Ono je snad možné naučit studenty řešit i slovní úlohy.

**Př. 2:** Káťa K. s Vojtou H. ze 4B2009 mažou za trest tabule na celé škole. Když budou mazat společně 25 minut, domaže Káťa zbytek za 5 minut. Když bude Vojta mazat 28 minut sám, dodělají trest společně za 12 minut. Za jak dlouho by všechny tabule smazal každý z nich sám.

$$\text{Káťa} \quad x \text{ minut celý trest} \Rightarrow \text{za jednu minutu } \frac{1}{x}$$

$$\text{Vojta} \quad y \text{ minut celý trest} \Rightarrow \text{za jednu minutu } \frac{1}{y}$$

vytvoření rovnic:

$$\text{společně 25 minut domaže Káťa zbytek za 5 minut: } 25 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{5}{x} = 1$$

$$\text{Vojta mazat 28 minut a dodělají trest společně za 12 minut: } 12 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{28}{y} = 1$$

**Substitute:**  $\frac{1}{x} = a$ ,  $\frac{1}{y} = b \Rightarrow$  Řešíme soustavu:

$$25(a+b) + 5a = 1$$

$$12(a+b) + 28b = 1$$

$$\hline 30a + 25b = 1$$

$$\hline 12a + 40b = 1$$

z 2. rovnice si vyjádříme  $a$  a dosadíme do první:

$$12a + 40b = 1 \Rightarrow a = \frac{1 - 40b}{12}$$

$$30 \frac{1 - 40b}{12} + 25b = 1$$

$$15 - 600b + 150b = 6$$

$$450b = 9$$

$$b = \frac{1}{50}$$

$$a = \frac{1 - 40 \cdot \frac{1}{50}}{12} = \frac{\frac{1}{5}}{12} = \frac{1}{60}$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$\frac{1}{x} = a = \frac{1}{60} \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{60} \Rightarrow x = 60$$

$$\frac{1}{y} = b = \frac{1}{50} \qquad \frac{1}{y} = \frac{1}{50} \Rightarrow y = 50$$

$$K = \{[60; 50]\}$$

Káťa by sama smazala všechny tabule za 60 minut, Vojta by to stihnul za 50 minut.

**Př. 3:** Vyřeš soustavu rovnic 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 61 \\ x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$$

Soustavu bychom mohli řešit klasicky – odečtení rovnic a dosazováním. Přítomnost druhých mocnin však situaci komplikuje.

**Substitute:** soustava obsahuje pouze  $x^2$  a  $y^2$ , substitucí se zbavíme druhých mocnin:

$$x^2 = a, \quad y^2 = b \Rightarrow \text{Řešíme soustavu:}$$

$$a + b = 61$$

$$a - b = 11$$

$$\underline{\hspace{1.5cm}} \qquad a + b = 61$$

$$[[1]] + [[2]] \qquad 2a = 72$$

$$a = 36$$

$$\text{Dopočteme } b: a + b = 61 \Rightarrow 36 + b = 61$$

$$b = 25$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$x^2 = a = 36 \qquad x^2 - 36 = 0$$

$$(x - 6)(x + 6) = 0$$

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = -6$$

$$y^2 = b = 25 \qquad y^2 - 25 = 0$$

$$(y - 5)(y + 5) = 0$$

$$y_1 = 5 \qquad y_2 = -5$$

Zbývá sestavit dvojice, obě hodnoty  $x$  i  $y$  jsme získali z jedné dvojice  $a, b \Rightarrow$  mohou kombinovat všechna  $x$  se všemi  $y$

$$K = \{[-6; -5]; [-6; 5]; [6; -5]; [6; 5]\}$$

**Pedagogická poznámka:** Kromě toho, že někteří studenti řeší na konci kvadratické rovnice  $x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$ , bývá občas problém s tím, aby studenti sestavili všechny dvojice do řešení.

**Př. 4:** Vyřeš soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 13 \\ x^2 + 2y &= 10 \end{aligned}$$

**Substitute:** soustava obsahuje pouze  $x^2$  ale  $y$  se vyskytuje v první i druhé mocnině, substitucí se zbavíme pouze druhé mocniny  $x$ :  $x^2 = a \Rightarrow$  Řešíme soustavu:

$$a + y^2 = 13$$

$$a + 2y = 10$$

z druhé rovnice si vyjádříme  $a$  a dosadíme do první rovnice:

$$a + 2y = 10 \Rightarrow a = 10 - 2y$$

$$(10 - 2y) + y^2 = 13$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$(y + 1)(y - 3) = 0$$

$$y_1 = -1 \Rightarrow a_1 = 10 - 2y = 10 - 2 \cdot (-1) = 12$$

$$y_2 = 3 \Rightarrow a_2 = 10 - 2y = 10 - 2 \cdot 3 = 4$$

**Návrat k původní proměnné:**

z dvojice  $a_1 = 12$ ,  $y_1 = -1$

$$x^2 = a = 12$$

$$x^2 - 12 = 0$$

$$(x - \sqrt{12})(x + \sqrt{12}) = 0$$

$$x_1 = \sqrt{12}$$

$$x_2 = -\sqrt{12}$$

Tedy dvojice řešení  $[\sqrt{12}; -1]$  a  $[-\sqrt{12}; -1]$

z dvojice  $a_2 = 4$ ,  $y_2 = 3$

$$x^2 = a = 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

Tedy dvojice řešení  $[2; 3]$  a  $[-2; 3]$

Dvojice  $x$  a  $y$  už jsou sestaveny, nemůžeme vytvořit dvojici  $[\sqrt{12}; 3]$ , protože  $\sqrt{12}$  jsme získali k jiné hodnotě  $y$ .

$$K = \{[\sqrt{12}; -1]; [-\sqrt{12}; -1]; [2; 3]; [-2; 3]\}$$

**Pedagogická poznámka:** Někteří studenti jsou trochu nespřízniví z toho, že substituuji pouze jednu proměnnou a druhá zůstává nezměněná.

**Př. 5:** Vyřeš soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x-1} + 2\frac{y}{y+1} &= 7 \\ \frac{4x}{x-1} - \frac{y}{y+1} &= 2 \end{aligned}$$

Podmínky:  $x \neq 1$ ,  $y \neq -1$

**Substitute:**  $\frac{x}{x-1} = a, \frac{y}{y+1} = b \Rightarrow$  Řešíme soustavu:

$$3a + 2b = 7$$

$$4a - b = 2$$

z druhé rovnice si vyjádříme  $b$  a dosadíme do první rovnice:  $4a - b = 2 \Rightarrow b = 4a - 2$

$$3a + 2(4a - 2) = 7$$

$$3a + 8a - 4 = 7$$

$$11a = 11$$

$$a = 1$$

$$b = 4a - 2 = 4 \cdot 1 - 2 = 2$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$\frac{x}{x-1} = a = 1$$

$$\frac{x}{x-1} = 1 \quad / \cdot (x-1)$$

$$x = x - 1$$

$0 = -1$  - nemůžeme najít žádné  $x \Rightarrow$  soustava nemá řešení, nemá cenu dopočítávat  $y$

$$K = \emptyset$$

**Pedagogická poznámka:** V předchozím i následujícím příkladě je důležité, aby studenti pochopili, že hledají uspořádanou dvojici čísel a jakmile je jasné, že jedno z nich není možné najít, že další řešení zbytečné. Poměrně malé procento studentů má problémy se substituováním levého zlomku, kvůli rozdílným číslům v čitatelích.

**Př. 6:** Vyřeš soustavu rovnic

$$\frac{2(x-1)}{y+1} - \frac{3(y+2)}{x-1} = 3$$

$$\frac{x-1}{y+1} + \frac{2(y+2)}{x-1} = -2$$

Podmínky:  $x \neq 1, y \neq -1$

**Substitute:** můžeme klidně substituovat i výraz, který obsahuje dvě proměnné:  $\frac{x-1}{y+1} = a,$

$\frac{y+2}{x-1} = b \Rightarrow$  Řešíme soustavu:

$$2a - 3b = 3$$

$$a + 2b = -2$$

$$2a - 3b = 3$$

$$\begin{array}{r} \llbracket 1 \rrbracket - 2 \cdot \llbracket 2 \rrbracket \\ \hline -7b = 7 \end{array}$$

$$b = -1$$

$$2a - 3b = 3 \Rightarrow 2a - 3 \cdot (-1) = 3$$

$$a = 0$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$\frac{x-1}{y+1} = a = 0$$

$$\frac{y+2}{x-1} = b = -1$$

Opět získáváme soustavu rovnic:

$$\frac{x-1}{y+1} = 0$$

$$\frac{y+2}{x-1} = -1$$

Rovnice upravíme:

$$\frac{x-1}{y+1} = 0 \quad / \cdot (y+1)$$

$$\frac{y+2}{x-1} = -1 \quad / \cdot (x-1)$$

$$x-1 = 0$$

$$y+2 = 1-x$$

Z první rovnice vyjádříme  $x$ :  $x = 1$ , dosadíme do druhé:

$$y+2 = 1-1$$

$$y = -2$$

Zdá se, že řešením je dvojice čísel  $[1; -2]$ , ale tato dvojice nevyhovuje podmínce:  $x \neq 1$ .

$$K = \emptyset$$

**Pedagogická poznámka:** Někteří studenti se potřebují ujistit, že je možné substituovat výraz, ve kterém se vyskytují dvě neznámé. Další rozpaky se objevují, když při návratu k původním proměnným vznikne opět soustava rovnic.

**Př. 7:** Petáková:

strana 17/cvičení 34 c) d)

strana 17/cvičení 35 b)

strana 17/cvičení 36 a) b)

strana 17/cvičení 37 b) c) d)

**Shrnutí:** Substituci můžeme používat i při řešení soustav rovnic k nahrazení jedné nebo více neznámých.