2.7.23 Použití substituce při řešení soustav rovnic

Předpoklady: 2722

Pedagogická poznámka: Hodinu je možné pojmout dvěma způsoby:
Pokud budete řešit i slovní úlohy, je potřeba ještě polovina další vyučovací hodiny (zbytek pak můžete věnovat písemce).
Pokud slovní úlohy vynecháte, 45 minut bude stačit.

Pedagogická poznámka: Stejně jako ve všech ostatních příkladech s použitím substituce je třeba dát pozor, aby studenti nahradili všechny výskyty proměnné a pouze tehdy pokud jde opravdu o stejné výrazy.

Př. 1: Mistr s učněm opravují auto. Kdyby pracovali společně 5hodin, učedník by práci dodělal za 1hodinu. Kdyby pracovali společně 2 hodiny a pak mistr ještě 3 hodiny sám, zbývalo by ještě 1/3 práce. Jak dlouho by auto opravoval každý sám?

mistr x hodin celá oprava $\Rightarrow$ za jednu hodinu $\frac{1}{x}$

učeň y hodin celá oprava $\Rightarrow$ za jednu hodinu $\frac{1}{y}$

sestavíme rovnice:

společně 5hodin učedník by práci dodělal za 1hodinu $\Rightarrow$ $5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{y}=1$

společně 2 hodiny a pak mistr ještě 3 hodiny sám, zbývalo by ještě 1/3 práce

$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{3}{x}=1-\frac{1}{3}$

získáváme soustavu:

$$5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{y}=1$$

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{3}{x}=1-\frac{1}{3}$$

Nevýhoda – obě neznámé ve jmenovateli $\Rightarrow$

Substituce: $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$ $\Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$5(a+b)+b=1$$

$$2(a+b)+3a=1-\frac{1}{3}$$ upravíme:

$$5a+6b=1$$

$$5a+2b=\frac{2}{3}$$

$$5a+6b=1$$

$[\![1]\!]-[\![2]\!]$ $\quad 4b=\frac{1}{3}$

Dopočteme b: $4b=\frac{1}{3} \Rightarrow b=\frac{1}{12}$

získáme a z první rovnice:

$$5a+6\cdot\frac{1}{12}=1$$

$$5a=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{10}$$

Návrat k původní proměnné:

$\frac{1}{x}=a=\frac{1}{10}$ $\qquad \frac{1}{x}=\frac{1}{10} \Rightarrow x=10$

$\frac{1}{y}=b=\frac{1}{12}$ $\qquad \frac{1}{y}=\frac{1}{12} \Rightarrow y=12$

$$K=\{[10;12]\}$$

Mistr by provedl opravu za 10 hodin, učedník za 12.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad považuji za jeden ze svých největších pedagogických úspěchů. Ve třídě 4B2011 se přes to, že od poslední úlohy na společnou práci uplynulo přes dva měsíce a třída předvedla krátký výstup naprosté beznaděje a bezmoci, podařilo samostatně vyřešit úkol prakticky všem. Ono je snad možné naučit studenty řešit i slovní úlohy.

Př. 2: Káťa K. s Vojtou H. ze 4B2009 mažou za trest tabule na celé škole. Když budou mazat společně 25 minut, domaže Káťa zbytek za 5minut. Když bude Vojta mazat 28 minut sám, dodělají trest společně za 12 minut. Za jak dlouho by všechny tabule smazal každý z nich sám.

Káťa $\qquad x$ minut celý trest $\Rightarrow$ za jednu minutu $\frac{1}{x}$

Vojta $\qquad y$ minut celý trest $\Rightarrow$ za jednu minutu $\frac{1}{y}$

vytvoření rovnic:

společně 25 minut domaže Káťa zbytek za 5minut: $25\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{5}{x}=1$

Vojta mazat 28 minut a dodělají trest společně za 12 minut: $12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{28}{y}=1$

Substituce: $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b \Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$25(a+b)+5a=1$$
$$12(a+b)+28b=1$$

$$30a+25b=1$$
$$12a+40b=1$$

z 2. rovnice si vyjádříme a a dosadime do první:

$$12a+40b=1 \Rightarrow a=\frac{1-40b}{12}$$

$$30\frac{1-40b}{12}+25b=1$$

$$15-600b+150b=6$$

$$450b=9$$

$$b=\frac{1}{50}$$

$$a=\frac{1-40\frac{1}{50}}{12}=\frac{\frac{1}{5}}{12}=\frac{1}{60}$$

Návrat k původní proměnné:

$\frac{1}{x}=a=\frac{1}{60}$ $\qquad$ $\frac{1}{x}=\frac{1}{60} \Rightarrow x=60$

$\frac{1}{y}=b=\frac{1}{50}$ $\qquad$ $\frac{1}{y}=\frac{1}{50} \Rightarrow y=50$

$K=\{[60;50]\}$

Káťa by sama smazala všechny tabule za 60 minut, Vojta by to stihnul za 50 minut.

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} x^2+y^2=61 \\ x^2-y^2=11 \end{matrix}$.

Soustavu bychom mohli řešit klasicky – odečtení rovnic a dosazováním. Přítomnost druhých mocnin však situaci komplikuje.

Substituce: soustava obsahuje pouze x^2 a y^2, substitucí se zbavíme druhých mocnin:

$x^2=a$, $y^2=b \Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$a+b=61$$

$$a-b=11$$

$$a+b=61$$

$$[\![1]\!]+[\![2]\!] \qquad 2a=72$$

$$a=36$$

Dopočteme b: $a+b=61 \Rightarrow 36+b=61$

$b=25$

Návrat k původní proměnné:

$x^2=a=36$ $\qquad$ $x^2-36=0$

$(x-6)(x+6)=0$

$x_1=6$ $\qquad$ $x_2=-6$

$y^2=b=25$ $\qquad$ $y^2-25=0$

$(y-5)(x+5)=0$

$y_1=5$ $\qquad$ $y_2=-5$

Zbývá sestavit dvojice, obě hodnoty x i y jsme získali z jedné dvojice a, b $\Rightarrow$ mohu kombinovat všechna x se všemi y

$K = \{[-6;-5];[-6;5];[6;-5];[6;5]\}$

Pedagogická poznámka: Kromě toho, že někteří studenti řeší na konci kvadratické rovnice $x^2 = 36 \;\Rightarrow\; x = 6$, bývá občas problém s tím, aby studenti sestavili všechny dvojice do řešení.

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic
$$x^2 + y^2 = 13$$
$$x^2 + 2y = 10$$

Substituce: soustava obsahuje pouze x^2 ale y se vyskytuje v první i druhé mocnině, substitucí se zbavíme pouze druhé mocniny x: $x^2 = a$ $\Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$a + y^2 = 13$

$\underline{a + 2y = 10}$

z druhé rovnice si vyjádříme a a dosadíme do první rovnice:

$a + 2y = 10 \Rightarrow a = 10 - 2y$

$(10 - 2y) + y^2 = 13$

$y^2 - 2y - 3 = 0$

$(y+1)(y-3) = 0$

$y_1 = -1 \Rightarrow a_1 = 10 - 2y = 10 - 2\cdot(-1) = 12$

$y_2 = 3 \Rightarrow a_2 = 10 - 2y = 10 - 2\cdot 3 = 4$

Návrat k původní proměnné:

z dvojice $a_1 = 12$, $y_1 = -1$

$x^2 = a = 12$

$x^2 - 12 = 0$

$\left(x - \sqrt{12}\right)\left(x + \sqrt{12}\right) = 0$

$x_1 = \sqrt{12}$ $\qquad x_2 = -\sqrt{12}$

Tedy dvojice řešení $\left[\sqrt{12};-1\right]$ a $\left[-\sqrt{12};-1\right]$

z dvojice $a_2 = 4$, $y_2 = 3$

$x^2 = a = 4$

$x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$x_1 = 2$ $\qquad x_2 = -2$

Tedy dvojice řešení $[2;3]$ a $[-2;3]$

Dvojice x a y už jsou sestaveny, nemůžeme vytvořit dvojici $\left[\sqrt{12};3\right]$, protože $\sqrt{12}$ jsme získali k jiné hodnotě y.

$K = \left\{\left[\sqrt{12};-1\right];\left[-\sqrt{12};-1\right];[2;3];[-2;3]\right\}$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti jsou trochu nesví z toho, že substituují pouze jednu proměnnou a druhá zůstává nezměněná.

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic
$$\frac{3x}{x-1} + 2\frac{y}{y+1} = 7$$
$$\frac{4x}{x-1} - \frac{y}{y+1} = 2$$

Podmínky: $x \neq 1$, $y = -1$

Substituce: $\frac{x}{x-1}=a$, $\frac{y}{y+1}=b \Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$3a+2b=7$$
$$4a-b=2$$

z druhé rovnice si vyjádříme b a dosadíme do první rovnice: $4a-b=2 \Rightarrow b=4a-2$

$$3a+2(4a-2)=7$$
$$3a+8a-4=7$$
$$11a=11$$
$$a=1$$
$$b=4a-2=4\cdot 1-2=2$$

Návrat k původní proměnné:

$$\frac{x}{x-1}=a=1$$
$$\frac{x}{x-1}=1 \quad /\cdot(x-1)$$
$$x=x-1$$

$0=-1$ - nemůžeme najít žádné $x \Rightarrow$ soustava nemá řešení, nemá cenu dopočítávat y

$K=\emptyset$

Pedagogická poznámka: V předchozím i následujícím příkladě je důležité, aby studenti pochopili, že hledají uspořádanou dvojici čísel a jakmile je jasné, že jedno z nich není možné najít, že další řešení zbytečné.
Poměrně malé procento studentů má problémy se substituováním levého zlomku, kvůli rozdílným číslům v čitatelích.

Př. 6: Vyřeš soustavu rovnic
$$\frac{2(x-1)}{y+1}-\frac{3(y+2)}{x-1}=3$$
$$\frac{x-1}{y+1}+\frac{2(y+2)}{x-1}=-2$$

Podmínky: $x\neq 1$, $y=-1$

Substituce: můžeme klidně substituovat i výraz, který obsahuje dvě proměnné : $\frac{x-1}{y+1}=a$, $\frac{y+2}{x-1}=b \Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$2a-3b=3$$
$$a+2b=-2$$

$$2a-3b=3$$
$$[\![1]\!]-2\cdot[\![2]\!] \qquad -7b=7$$

$$b=-1$$
$$2a-3b=3 \Rightarrow 2a-3\cdot(-1)=3$$
$$a=0$$

Návrat k původní proměnné:

$$\frac{x-1}{y+1}=a=0$$

$$\frac{y+2}{x-1}=b=-1$$

Opět získáváme soustavu rovnic:

$$\frac{x-1}{y+1}=0$$

$$\frac{y+2}{x-1}=-1$$

Rovnice upravíme:

$$\frac{x-1}{y+1}=0 \qquad /\cdot(y+1)$$

$$\frac{y+2}{x-1}=-1 \quad /\cdot(x-1)$$

$$x-1=0$$

$$y+2=1-x$$

Z první rovnice vyjádříme *x*: $x=1$, dosadíme do druhé:

$$y+2=1-1$$

$$y=-2$$

Zdá se, že řešením je dvojice čísel $[1;-2]$, ale tato dvojice nevyhovuje podmínce: $x\neq 1$.

$$K=\emptyset$$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti se potřebují ujistit, že je možné substituovat výraz, ve kterém se vyskytují dvě neznámé. Další rozpaky se objevují, když při návratu k původním proměnným vznikne opět soustava rovnic.

Př. 7: Petáková:
strana 17/cvičení 34 c) d)
strana 17/cvičení 35 b)
strana 17/cvičení 36 a) b)
strana 17/cvičení 37 b) c) d)

Shrnutí: Substituci můžeme používat i při řešení soustav rovnic k nahrazení jedné nebo více neznámých.